Equations Différentielles Ordinaires

Maxime Weytens

Septembre 2019

1 Les bases

1.1 Théorème de Cauchy-Lipshitz

Théorème. Soient $\Omega \in \mathbb{R}^d$, $(d \in \mathbb{N})$ un ouvert; $J \in \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$.
Si $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ une fonction **continue** et **localement lipshitzienne en espace** ($\Leftarrow C^1$) sur $J \times \Omega$, alors le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t,y) & \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ possède une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert $I \subset J$ contenant t_0.

1.2 Séparation des variables

On considère l'équation différentielle

$$\boxed{y' = f(y)g(t)}$$

On procède alors comme suit:

$$\begin{array}{lll}
 & y' = f(y)g(t) & \\
\Leftarrow & \frac{y'}{f(y)} = g(t) & \textit{on intègre} \\
\Leftrightarrow & \int^t \frac{y'(s)}{f(y(s))} ds = \int^t g(s) ds & \\
\Leftrightarrow & \int^{y(t)} \frac{du}{f(u)} = \mathcal{G}(t) & \textit{où } \mathcal{G}(t) \textit{ est une primitive de } g \\
\Leftrightarrow & \mathcal{F}(y) = \mathcal{G}(t) & \textit{où } \mathcal{F} \textit{ est une primitive de } \frac{1}{f} \\
\Leftrightarrow & y(t) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{G}(t)) &
\end{array}$$

2 Equations Linéaires

Théorème. Dans une équation différentielle linéaire (sans condition initiale), l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ est un espace affine et s'écrit de la manière $\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_H$ où y_p est **une** solution particulière et $\mathcal{S}_H$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

On notera par convention y_h une solution de l'équation homogène. Elle sera souvent définie à une constante près désignée par une lettre grecque.

2.1 Ordre 1

On considère l'équation

$$\boxed{y' = a(t)y + b(t)}$$

En posant que $\mathcal{A}$ est une primitive de a, on obtient

$$y_h = \phi e^{\mathcal{A}(t)} \quad (\phi \in \mathbb{C})$$

Pour trouver une solution particulière, on utilise la méthode dite de "la variation des constantes". C'est à dire qu'on recherche une solution particulière de la forme $y_p = \phi(t)e^{\mathcal{A}(t)}$ où $\phi(t)$ est maintenant une fonction. Ainsi, en remplaçant dans l'équation, on obtient la condition :

$$\begin{array}{llll} & (\phi(t)e^{\mathcal{A}(t)})' = a(t)\phi(t)e^{\mathcal{A}(t)} + b(t) & & \\ \Leftrightarrow & \phi'(t)e^{\mathcal{A}(t)} + \phi(t)a(t)e^{\mathcal{A}(t)} = a(t)\phi(t)e^{\mathcal{A}(t)} + b(t) & \Leftrightarrow \phi'(t)e^{\mathcal{A}(t)} = b(t) \\ \Leftrightarrow & \phi'(t) = b(t)e^{-\mathcal{A}(t)} & \Leftrightarrow \phi(t) = \int^t b(s)e^{-\mathcal{A}(s)}ds \end{array}$$

On peut donc écrire la solution générale :

$$y(t) = e^{\mathcal{A}(t)} \int^t b(s)e^{-\mathcal{A}(s)}ds + \phi e^{\mathcal{A}(t)} = e^{\mathcal{A}(t)} \int^t b(s)e^{-\mathcal{A}(s)}ds$$

$$\boxed{\textbf{Solution :}\ y(t) = e^{\mathcal{A}(t)} \int^t b(s)e^{-\mathcal{A}(s)}ds}$$

2.2 Ordres Supérieurs

Le prinicipe de la variation des constantes peut se généraliser aux ordres supérieurs.
On considère, pour l'exemple, l'équation d'ordre 2

$$\boxed{y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)}$$

Supposons que l'on connaisse une solution particulière non-triviale y_h de l'équation homogène. A nouveau, tout multiple ϕy_h est aussi solution. On cherche donc une solution de la forme $y(t) = \phi(t)y_h$

En remplaçant dans l'équation, le terme en $\phi(t)$ se simplifie :

$$\begin{array}{lll} & (\phi'' y_h + 2\phi' y_h' + \phi y_h'') + a(t)(\phi' y_h + \phi y_h') + b(t)\phi y_h = c(t) & \textit{on regroupe les dérivées de } \phi \\ \Leftrightarrow & y_h\phi'' + (2y_h' + a(t)y_h)\phi' + (y_h'' + a(t)y_h' + b(t)y_h)\phi = c(t) & \textit{le dernier terme du membre de gauche est nul} \\ \Leftrightarrow & y_h\phi'' + (2y_h' + a(t)y_h)\phi' = c(t) & \textit{équation d'ordre 1 en } \phi' \textit{ !} \end{array}$$

On peut donc trouver ϕ', puis primitiver pour trouver ϕ et enfin, on a la solution $y(t) = \phi(t)y_h(t)$.

Dans le cas d'ordre $n > 2$, il faut recommencer cette méthode pour l'équation en ϕ' jusqu'à atteindre l'ordre 1, i.e. il faudra trouver $n-1$ solutions homogène non-triviales puis trouver $n-1$ primitives. Ce n'est pas facile mais cela nous évite de calculer des racines de polynômes.

2.3 Coefficients constants

On considère l'équation

$$\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = b(t)}$$

Par soucis de clarté, on traite le cas $n = 3$. Il est très facile de généraliser à partir de là.

Supposons que l'on connaisse les 3 racines du polynôme caractéristique $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Nommons les $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

L'equation différentielle se réécrit

$$\begin{array}{lll} & (\frac{d}{dt}-\alpha_3)(\frac{d}{dt}-\alpha_2)(\frac{d}{dt}-\alpha_1)y = b(t) & \\ \Leftrightarrow & (\frac{d}{dt}-\alpha_3)(\frac{d}{dt}-\alpha_2)y_1 = b(t) & y_1(t) := (\frac{d}{dt}-\alpha_1)y \\ \Leftrightarrow & (\frac{d}{dt}-\alpha_3)y_2 = b(t) & y_2(t) := (\frac{d}{dt}-\alpha_2)y_1 \end{array}$$

On peut maintenant résoudre une à une les équations d'ordre 1 avec la méthode vue plus haut:

$$\left\{\begin{array}{lll} (\frac{d}{dt}-\alpha_3)y_2 & = b(t) & \Rightarrow \text{on trouve } y_2(t) \\ (\frac{d}{dt}-\alpha_2)y_1 & = y_2(t) & \Rightarrow \text{on trouve } y_1(t) \\ (\frac{d}{dt}-\alpha_1)y & = y_1(t) & \Rightarrow \text{on trouve } y(t) \end{array}\right.$$

2.4 Réduction à l'ordre 1 et exponentielle de matrice

Si on a une équation du type $y^{(n)} = f(y, y', ..., y^{(n-1)}, t)$ où f est linéaire en espace ou si on a un système d'équations linéaires, on peut se ramener à une équation d'ordre 1.

Exemple. $\left\{\begin{array}{ll} x' & = a_1x + a_2y + b_1(t) \\ y'' & = a_4y' + a_3y + b_3(t) \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ 0 \\ b_3(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow Y' = AY + B(t)$

On considère donc l'équation

$$\boxed{Y = AY + B(t)}$$

où contrairement à la section 1, A est une matrice (indépendante du temps). On a alors directement

$$Y_H = \exp(\mathrm{At}).\Phi \quad (\Phi \in \mathbb{C}^{\mathrm{d}})$$

Pour calculer l'exponentielle de A, le plus simple est de jordaniser celle-ci. Si $S = m_{E,B_J}(Id)$ désigne la matrice dont les colonnes représentent les vecteurs de la base de Jordan, on écrit que $J = S^{-1}AS$ où J est sous forme canonique de Jordan.

Propriété. *Avec les mêmes notations,* $\exp(\mathrm{At}) = \mathrm{S}.\exp(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{ASt}).\mathrm{S}^{-1} = \mathrm{S}.\exp(\mathrm{Jt}).\mathrm{S}^{-1}$

Ainsi, la solution homogène est :

$$Y_H = S.\exp(\mathrm{Jt}).\mathrm{S}^{-1}.\Phi = \mathrm{S}.\exp(\mathrm{Jt}).\Psi \quad (\Psi := \mathrm{S}^{-1}.\Phi \in \mathbb{C}^{\mathrm{d}} \Rightarrow \textit{ permet de ne pas inverser } \mathrm{S})$$

Pour la solution particulière :

- Si les composantes de $B(t)$ sont des $\left\{\begin{array}{l}\text{polynômes}\\ \text{exponentielles}\end{array}\right.$, on cherche Y_P sous la forme de $\left\{\begin{array}{l}\text{polynômes}\\ \text{ces exponentielles}\end{array}\right.$
  La solution est alors :
  $$\boxed{\boxed{Y(t) = S.\exp(\mathrm{Jt}).\Psi + \mathrm{Y_P}}}$$
- Sinon, on fait la méthode de la variation des constantes $Y_P = S.\exp(\mathrm{Jt}).\mathrm{S}^{-1}.\Phi(\mathrm{t})$.
  La solution est alors :
  $$\boxed{\boxed{Y(t) = S.\exp(\mathrm{Jt}).\mathrm{S}^{-1}.(\Phi + \Phi(\mathrm{t}))}}$$

2.5 Equation d'Euler

On considère l'équation

$$\boxed{a_n(\alpha t + \beta)^n y^{(n)} + ... + a_1(\alpha t + \beta)y' + a_0y = 0}$$

On pose : $\tau = \left\{\begin{array}{ll} \ln(\alpha \mathrm{t} + \beta) & \text{si } \alpha t + \beta > 0 \\ \ln -(\alpha \mathrm{t} + \beta) & \text{si } \alpha t + \beta < 0 \end{array}\right.$

3 Equations Non-Linéaires

3.1 Sans terme d'ordre 1

On considère l'équation

$$\boxed{y'' = f(y)}$$

L'astuce est de faire apparaître un terme "Energie cinétique" en multipliant par y' :

$$\begin{array}{lll} & y''.y' = f(y).y' & \textit{on intègre} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}(y')^2 = \mathcal{F}(y) + \lambda & \textit{où } \mathcal{F} \textit{ est une primitive de } f \textit{ et } \lambda \in \mathbb{C} \\ \Leftrightarrow & y' = \pm\sqrt{2(\mathcal{F}(y)+\lambda)} & \\ \Leftrightarrow & \pm\int^y \frac{du}{\sqrt{2(\mathcal{F}(u)+\lambda)}} = t + \mu & \mu \in \mathbb{C} \end{array}$$

3.2 Equation "homogène"

On considère l'équation

$$\boxed{y' = f(t,y)} \quad (\text{où } f \text{ est telle que } f(kt,ky) = f(t,y),\ \forall k,t \neq 0,\ \forall y \in \Omega)$$

On pose : $u(t) = \dfrac{y(t)}{t},\ t \neq 0$

3.3 Equation de Bernoulli

On considère l'équaiton

$$\boxed{y' = a(t)y + b(t)y^k} \quad (k \neq 1)$$

On pose : $u(t) = (y(t))^{1-k}$

3.4 Equation de Ricatti

On considère l'équation

$$\boxed{y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t)}$$

Supposons que l'on connaisse une solution particulière y_p,
On pose : $u(t) = \dfrac{1}{y(t) - y_p}$

3.5 Equation exacte

On considère l'équation

$$\boxed{f(t,y) + g(t,y)y' = 0} \quad (f,g \in C^1(D \subset \mathbb{R}^2), D \text{ étoilé})$$

Supposons qu'on ait l'égalité $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial t}$ $(*)$. En posant $F(t,y) = \displaystyle\int_0^1 (f(\tau t, \tau y)t + g(\tau t, \tau y)y)d\tau$, l'équation devient:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}F(t,y) = 0$$

Donc $F(t,y)$ est une intégrale première et on peut, en théorie, trouver des solutions grâce au théorème de la fonction implicite.
Remarque. *On peut parfois rendre une équation exacte en la mutipliant par un facteur intégrant $M(t,y)$ qui permet l'égalité $(*)$ entre les nouvelles fonctions f et g.*