PHYS-F-201 : exercices
Introduction à la thermodynamique hors-équilibre

---

1. On considère une paroi homogène d'épaisseur d, d'aire Σ et de conductivité thermique λ. Les deux faces sont maintenues à des températures différentes, notées T_1 et T_2. Montrez qu'en régime stationnaire et en négligeant les effets de bord, le courant de chaleur peut s'écrire sous la forme

$$I_Q = \frac{\delta Q}{dt} = \frac{T_1 - T_2}{\mathcal{R}}$$

et donnez l'expression de la résistance thermique $\mathcal{R}$. Calculez la quantité de chaleur traversant chaque seconde une fenêtre rectangulaire en verre de 1 mètre de large, 2 mètre de long et d'épaisseur 2 centimètres lorsque $T_1 = 0°C$ et $T_2 = 20°C$. Même question pour une fenêtre de mêmes dimensions avec double vitrage dont l'épaisseur des vitres internes et externes est de 0,4 centimètres. La conductivité thermique de l'air est 0,023 W m^{-1} K^{-1}, celle du verre 0,8 W m^{-1} K^{-1}.

---

2. On considère un barreau de diffusivité thermique κ en équilibre thermique à la température T_0. A l'instant $t = 0$, une des extrémités du barreau est chauffée à la température T_1. Calculez l'évolution de la température du barreau au cours du temps en supposant que la chaleur ne se propage que le long de l'axe du barreau. Vous montrerez tout d'abord que l'équation de la chaleur peut s'exprimer sous la forme

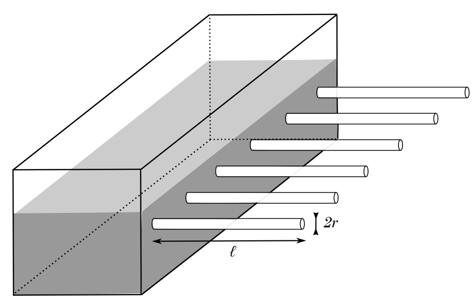
$$\frac{d^2T}{du^2} + 2u\frac{dT}{du} = 0, \qquad u = \frac{x}{\sqrt{4\kappa t}},$$

x mesurant la position d'un point le long de l'axe du barreau.

Question posée à l'examen de janvier 2018

Le physicien britannique Jan Ingenhousz proposa en 1789 une expérience permettant de comparer les conductivités thermiques de différents métaux.

Des tiges cylindriques rigides, homogènes de même longueur ℓ et de même rayon $r \ll \ell$, mais composées chacune de différents matériaux, sont reliées par l'une de leurs extrémités à un bac rempli d'eau maintenue en ébullition à température T_e, comme l'illustre la figure ci-contre. L'ensemble est disposé à l'air libre à une température $T_0 = 293$ K constante. La chaleur δQ transférée à l'atmosphère à travers un élément de surface $d\Sigma$ d'une tige à température T pendant la durée dt sera supposée donnée par $\delta Q = h\theta\, dt\, d\Sigma$, où $\theta = T - T_0$, et h est un coefficient identique pour toutes les tiges.



(a) Exprimez le courant de chaleur $\vec{\mathcal{J}}(x)$ le long d'une tige à l'abscisse x (axe orienté de l'extrémité fixe à l'extrémité libre avec l'origine au point d'ancrage) en fonction de la température $T(x)$ et de la conductivité thermique λ.

(b) Etablissez en régime stationnaire le bilan d'énergie pour un tronçon de tige compris entre les abscisses x et $x + dx$. Puis, montrez que l'excédent de température $\theta(x)$ obéit à une équation différentielle du type

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{\theta}{\delta^2} = 0$$

où δ est une longueur caractéristique que vous déterminerez.

(c) En supposant que l'extrémité de chaque tige est à la température T_0, vérifiez que la solution générale est donnée par $\theta(x) = A\exp(x/\delta) + B\exp(-x/\delta)$, où A et B sont des constantes que vous déterminerez.

(d) Donnez la forme limite de $\theta(x)$ lorsque $\ell/\delta \to +\infty$.

(e) Les tiges sont initialement enduites de cire dont la température de fusion est $T_f = 333$ K. Proposez une méthode pour mesurer les rapports des conductivités thermiques des différentes tiges.