PHYS-F-201 : exercices
Thermodynamique des systèmes diélectriques et magnétiques

---

1. En utilisant les équations de Maxwell dans la matière, démontrez l'identité de Poynting

$$\vec{j}_{\text{libre}} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\mathcal{H}} \times \vec{E} \right) - \vec{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \; .$$

---

2. Montrez qu'un bloc rectangulaire d'un matériau diélectrique uniformément polarisé (voir figure 1) est équivalent à un condensateur plan dont vous préciserez la charge électrique. Déterminez le champ électrique dans ce condensateur en traitant les armatures comme des plans d'extension infinie.

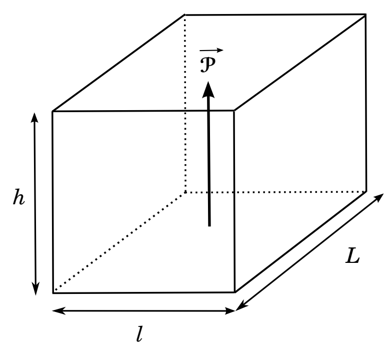


FIGURE 1 – Bloc uniformément polarisé.

---

3. Montrez qu'un barreau cylindrique uniformément aimanté (l'aimantation étant parallèle à l'axe de symétrie du barreau) est équivalent à un solénoïde dont vous préciserez le courant. Déterminez le champ magnétique le long de l'axe du barreau en considérant un cylindre d'extension infinie.

---

4. Soit une sphère de rayon R uniformément aimantée (aimantation $\vec{\mathcal{M}}$ dirigée selon l'axe z). Par symétrie, $\vec{A} = A_\phi(r, \theta)\vec{e}_\phi$ en coordonnées sphériques ($\vec{e}_\phi$ étant un vecteur unitaire azimutal).
   (a) Montrez que A_ϕ est solution de l'équation $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{0}$ et peut s'écrire sous la forme $A_\phi = f(r) \sin\theta$.
   (b) Montrez que $f(r) = C_1 r^\alpha + C_2 r^\beta$ et déterminez α et β.
   (c) Déterminez les constantes C_1 et C_2 en appliquant les conditions aux limites et les relations de passage entre les deux milieux.
   (d) Donnez l'expression des champs $\vec{B}$ et $\vec{\mathcal{H}}$ à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

---

5. Montrez à partir des équations de Maxwell et des relations de passage que la variation infinitésimale de l'énergie d'un corps diélectrique soumis au champ électrique produit par des conducteurs chargés est donnée par

$$\delta W_e = \sum_i \Phi_i \delta \mathcal{Q}_i \, ,$$

où Φ_i et $\mathcal{Q}_i$ représentent respectivement le potentiel électrostatique et la charge électrique du conducteur i. Les conducteurs seront supposés parfaits. La linéarité des équations de Maxwell implique que les charges sont des fonctions linéaires des potentiels :

$$Q_i = \sum_j C_{ij}\Phi_j$$

où les coefficients de capacité mutuelle C_{ij} sont des quantités caractéristiques du système. En utilisant les relations de Maxwell pour le potentiel

$$\tilde{F} = F - \sum_i \Phi_i Q_i\,,$$

où F désigne l'énergie libre, montrez que $C_{ij} = C_{ji}$. Calculez la capacité d'un condensateur plan lorsque les armatures sont plongées dans un milieu diélectrique de permittivité ϵ.

---

6. Montrez à partir des équations de Maxwell et des relations de passage que la variation infinitésimale de l'énergie d'un corps aimanté soumis à un champ magnétique produit par un ensemble de circuits électriques constitués de fils conducteurs est donnée par

$$\delta W_m = \sum_i I_i \delta\psi_i\,,$$

où I_i et ψ_i représentent respectivement le courant électrique continu traversant le circuit i et le flux de l'induction magnétique à travers la surface délimitée par le circuit i. Les conducteurs seront supposés parfaits. La linéarité des équations de Maxwell implique que les flux sont des fonctions linéaires des courants :

$$\psi_i = \sum_j L_{ij} I_j$$

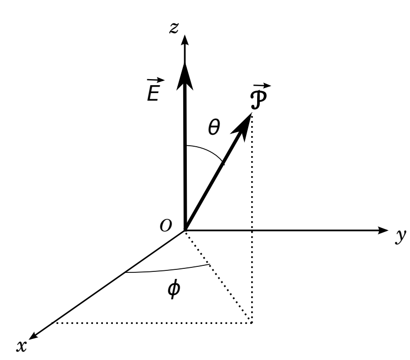
où les coefficients L_{ij} caractérisent l'induction mutuelle entre les circuits i et j. En utilisant les relations de Maxwell pour le potentiel

$$\tilde{F} = F - \sum_i I_i \Psi_i\,,$$

où F désigne l'énergie libre, montrez que $L_{ij} = L_{ji}$. Calculez le coefficient d'induction propre d'un solénoïde infini entourant un milieu magnétique de perméabilité μ.

Question posée à l'examen d'août 2018

Un récipient de volume V contient N molécules de gaz chlorhydrique maintenu à la température T. Chacune des molécules diatomiques HCl possède une polarisation électrique permanente $\vec{\mathcal{P}}$ de norme constante mais d'orientation quelconque. Le gaz, qui sera supposé parfait, est soumis à un champ électrique uniforme $\vec{E}$ dirigé selon l'axe z comme l'illustre la figure ci-dessous.



Le nombre moyen dN de molécules dont la vitesse est comprise entre $\vec{v}$ et $\vec{v} + d\vec{v}$, et dont la polarisation $\vec{\mathcal{P}}$ est contenue dans l'angle solide $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ est de la forme

$$dN = f(\vec{v}, \vec{\mathcal{P}})d^3v d\Omega = f_0 \exp\left(-\frac{\mathscr{E}}{k_B T}\right) d^3v d\Omega,$$

où k_B désigne la constante de Boltzmann. En ignorant les degrés de liberté internes des molécules et ceux associés à la rotation et à la vibration, l'énergie d'une molécule de masse m et de vitesse $\vec{v}$ est donnée par $\mathscr{E} = \frac{1}{2}mv^2 - \vec{E}\cdot\vec{\mathcal{P}}$.

(a) Rappelez la définition de la polarisation électrique. Donnez l'expression du vecteur $\vec{\mathcal{P}}$ d'une molécule de gaz en considérant qu'elle est constituée d'ions H^+ et Cl^- ponctuels séparés d'une distance d.

(b) Quelle polarisation moyenne du gaz attendez-vous dans les limites de très haute et très basse températures respectivement ? Justifiez votre réponse.

(c) Exprimez f_0 en fonction de N, m, T, E, et $\mathcal{P}$.

(d) Montrez que la polarisation moyenne des N molécules du gaz à une température T quelconque est dirigée selon l'axe z et que sa norme vaut $\langle \mathcal{P} \rangle = \left(\frac{1}{\tanh x} - \frac{1}{x} \right) N\mathcal{P}$ avec $x \equiv \frac{E\mathcal{P}}{k_B T}$.

(e) Déduisez la susceptibilité diélectrique du gaz.

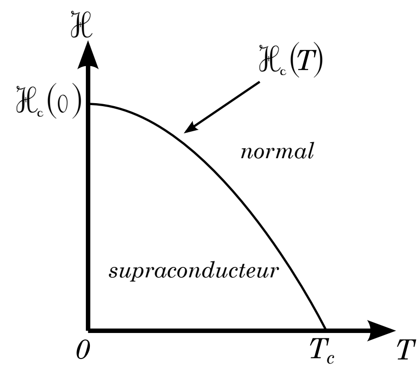
(f) Calculez l'énergie interne du gaz $U = \langle \mathcal{E} \rangle$.

Question posée à l'examen de janvier 2016

En 1911, le physicien néerlandais Heinke Kamerlingh Onnes et son collaborateur Gilles Holst découvrirent que la résistance électrique du mercure s'annule en dessous de $T_c = 4,2$ K. Il observèrent un phénomène similaire pour d'autres matériaux dits *supraconducteurs*. En 1933, les physiciens allemands Walther Meissner and Robert Ochsenfeld remarquèrent qu'un champ magnétique $\vec{B}$ ne peut pénétrer à l'intérieur d'un supraconducteur : un échantillon initialement à une température $T > T_c$ est pénétré par le champ magnétique ; mais une fois refroidi en dessous de T_c, le champ magnétique y est expulsé ($\vec{B} = \vec{0}$ dans le supraconducteur).

La supraconductivité est détruite lorsque l'excitation magnétique $\mathcal{H}$ excède une certaine valeur dont la dépendance en température est donnée empiriquement par la relation $\mathcal{H}_c(T) = \mathcal{H}_c(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right]$.

Le diagramme de phases d'un matériau supraconducteur est résumé sur la figure ci-contre.



Un long barreau indéformable de volume V est placé dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}_0$ créé par un solénoïde entourant le barreau. L'aimantation du barreau dans la phase normale sera supposée nulle. L'excitation magnétique à l'intérieur du barreau est donnée par $\vec{\mathcal{H}} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$, où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide. Les variables caractérisant l'état thermodynamique du barreau sont donc T et $\vec{\mathcal{H}}$.

(a) Montrez que la phase en équilibre à T et $\vec{\mathcal{H}}$ données est celle qui minimise le potentiel thermodynamique $\mathcal{F} = F - V\vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{B}$, où F est l'énergie libre. Soient $\mathcal{F}_N$ et $\mathcal{F}_S$ les potentiels des phases normale et supraconductrice respectivement. Le matériau sera donc supraconducteur si $\mathcal{F}_S(T, \vec{\mathcal{H}}) \leq \mathcal{F}_N(T, \vec{\mathcal{H}})$.

(b) Rappelez la définition de l'excitation magnétique $\vec{\mathcal{H}}$. Montrez que dans la phase normale, le champ magnétique pénètre complètement dans le barreau de sorte que $\vec{B} = \vec{B}_0$.

(c) Montrez que $d\mathcal{F} = -S\,dT - V\vec{B} \cdot d\vec{\mathcal{H}}$, où S désigne l'entropie du matériau, puis calculez les variations $\mathcal{F}_N(T, \vec{\mathcal{H}}) - \mathcal{F}_N(T, 0)$ et $\mathcal{F}_S(T, \vec{\mathcal{H}}) - \mathcal{F}_S(T, 0)$.

(d) Que vaut $\mathcal{F}_S(T, \vec{\mathcal{H}}_c(T))$?

(e) Établissez la relation suivante : $\mathcal{F}_S(T, \vec{\mathcal{H}}) - \mathcal{F}_N(T, \vec{\mathcal{H}}) = \frac{1}{2} V \mu_0 \left(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}_c(T)^2 \right)$.

(f) Montrez que la chaleur latente de la transition est donnée par $\mathcal{L}^{N \to S}(T) = \mu_0 V T \mathcal{H}_c \frac{d\mathcal{H}_c}{dT}$. Que pouvez-vous dire de l'ordre de la transition ?