PHYS-F-201 : exercices
Théorie cinétique des gaz

---

1. Considérez la distribution de Maxwell-Boltzmann

$$f(\vec{v}) = N\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{d/2} \exp\left(-\frac{m v^2}{2 k_B T}\right) \tag{1}$$

où d est la dimension de l'espace et utilisez la formule suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{2}$$

pour

(a) évaluez le module moyen de la vitesse pour des systèmes uni-, bi- et tri-dimensionnels ;

(b) évaluez la vitesse la plus probable pour des systèmes uni-, bi- et tri-dimensionnels ;

(c) évaluez l'énergie cinétique moyenne pour des systèmes uni-, bi- et tri-dimensionnels ;

(d) donnez une valeur numérique au module moyen de la vitesse et à la vitesse la plus probable pour l'azote à 20 degrés Celsius.

---

2. Supposez qu'un gaz parfait monoatomique soit placé dans une boîte cubique de côté L dans un champ de pesanteur caractérisé par une accélération constante g.

(a) Quelle est la forme de l'énergie d'une molécule si on néglige tous les degrés de liberté interne ?

(b) Calculez l'énergie moyenne en supposant que la probabilité d'observer une particule avec une position et une vitesse données est proportionnelle à l'exponentielle de l'énergie divisée par $k_B T$.

(c) Evaluez la partie provenant de l'énergie potentielle dans les limites des très hautes et des très basses températures.

(d) Evaluez la partie provenant de l'énergie potentielle dans les limites des grandes ou des très petites boîtes.

(e) Calculez la capacité calorifique à volume constant et évaluez ses limites à très basses et très hautes température.

(f) Evaluez le profil de pression en fonction de la hauteur dans l'hypothèse où la température est constante dans toute la boîte.

(g) Utilisez ce résultat pour estimer la pression dans un village à 2 000 m d'altitude lorsqu'il y fait 20 degrés Celsius, si simultanément la pression au niveau de la mer à 20 degrés Celsius est de 1 atmosphère.

---

3. La distribution de Maxwell-Boltzmann permet de calculer la valeur moyenne de l'énergie du système U. Elle permet aussi de calculer l'écart type de l'énergie ΔU.

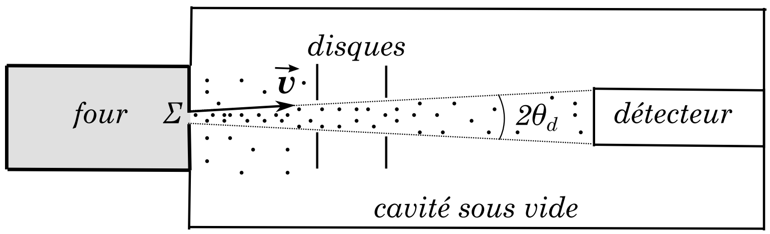
(a) Evaluez $\Delta U/U$.

(b) Que peut-on en conclure dans la limite thermodynamique $N \to +\infty$?

(c) Donnez une valeur numérique à l'énergie U contenue dans un m^3 de gaz parfait monoatomique à pression atmosphérique et à une température de 25 degrés Celsius. Evaluez également ΔU et $\Delta U/U$.

Question posée à l'examen de janvier 2017

L'expérience réalisée en 1959 par P. M. Marcus et J. H. McFee permit de mesurer avec précision la distribution des vitesses des molécules d'un gaz. Pour cela, un four de volume V contenant un gaz de potassium en équilibre thermodynamique à la température T et à la pression P émet des atomes à travers un petit orifice de section Σ. Les atomes traversent ensuite une cavité sous vide où deux disques coaxiaux en rotation et percés d'une fente permettent de filtrer les atomes selon leur vitesse comme l'illustre la figure ci-dessous.



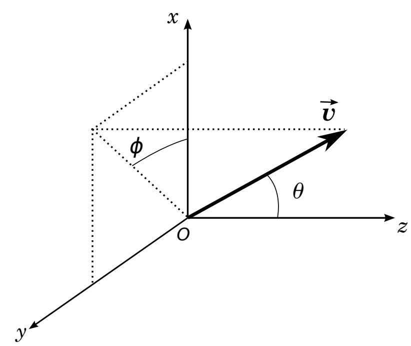
En supposant que le gaz soit parfait, le nombre moyen dN d'atomes dans le four dont la vitesse est comprise entre $\vec{v}$ et $\vec{v}+d\vec{v}$ est donné par la distribution de Maxwell-Boltzmann

$$dN = f(\vec{v})d^3v = f_0 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_BT}\right)d^3v\,,$$

où m est la masse des atomes et k_B la constante de Boltzmann.

(a) Exprimez le coefficient f_0 en fonction de P, V, T, m et k_B.

(b) Montrez que le nombre dN_Σ d'atomes qui s'échappent du four avec une vitesse comprise entre $\vec{v}$ et $\vec{v}+d\vec{v}$ pendant la durée dt est de la forme



$$dN_\Sigma = Kv^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_BT}\right)\cos\theta\sin\theta d\theta d\phi dv dt\,,$$

où K est un coefficient que vous déterminerez. Cette distribution est en très bon accord avec celle obtenue expérimentalement par Marcus et McFee.

(c) Montrez que l'énergie cinétique moyenne des atomes du jet est plus grande d'un facteur 4/3 que l'énergie cinétique moyenne des atomes dans le four. Interprétez physiquement ce résultat.

(d) Les disques sont désormais positionnés de manière à laisser passer tous les atomes. Calculez l'intensité totale $I = \int \frac{dN_\Sigma}{dt}$ du jet au niveau du détecteur d'ouverture angulaire $2\theta_d$.