

PHYS-F-201 : 1ère série d'exercices

1. Considérez les formes différentielles suivantes. Lesquelles sont des différentielles totales ?

$$dZ = 2(X + Y)dX + XdY$$

$$dZ = \exp(X)(YdX + dY)$$

$$dZ = \log(Y)XdX + X^2dY.$$

2. Considérez les formes différentielles suivantes. Quelle doit être la valeur du paramètre a pour qu'elles soient des différentielles totales ?

$$dZ = (2X + Y^a)dX + XdY$$

$$dZ = Y \exp(aX)(YdX + dY).$$

3. Considérez la forme différentielle suivante : $dF = 4XZdX + 2ZdY + 2(Y + X^2)dZ$. Vérifiez que dF est une différentielle totale. Évaluez $F(X; Y; Z)$ sachant que $F(0; 0; 0) = 0$. Calculez $F(2; 1; 1) - F(1; 1; 1)$ à partir de la forme différentielle dF et à partir de la forme explicite de F .

4. Pour une mole de gaz parfait, la pression P , la température T et le volume V répondent aux relations suivantes (R désignant la constante molaire du gaz parfait) :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\frac{RT}{P^2}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{R}{P}.$$

Écrivez dV et vérifiez que dV est bien une différentielle totale.

5. Considérez les équations d'état suivantes :

$$PV = (N_1 + N_2)RT$$

$$PV^2 = aT^3 \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$$

$$PV^2 = b(N_1^2 + N_2^2)T^3,$$

a , b et R étant des constantes. Lesquelles sont compatibles avec les propriétés d'intensivité ou d'extensivité de la pression P , du volume V et des nombres de moles N_1 et N_2 dans un mélange de deux espèces ?

6. Un chercheur prétend avoir établi la relation suivante entre l'énergie interne U , la température T et le volume V d'un matériau.

$$dU = aV^2T^{3/2}dT + bVT^2dV,$$

où a et b sont des constantes indépendantes des conditions de l'expérience. Donnez deux raisons pour douter de la valeur thermodynamique de cette loi.

7. Un gaz obéit à l'équation d'état $P(V - Nb) = NRT$ où b est une constante. Quel travail reçoit ce gaz lorsqu'on lui fait subir une transformation isotherme réversible depuis le volume V_1 jusqu'au volume V_2 . Comparez au cas du gaz parfait.

8. Supposez que vous connaissiez l'entropie S_0 d'un gaz parfait mono-atomique à une température T_0 donnée, pour un volume V_0 donné et un nombre de molécules N_0 donné.

- (a) Déterminez son entropie à une température et un volume quelconques. $\rightarrow W$ fixé.
- (b) En utilisant l'extensivité de l'entropie, donnez cette formule pour un nombre N quelconque de molécules.
- (c) En supposant que vous connaissiez le potentiel chimique $\mu(P_0, T_0)$ pour une pression P_0 et une température T_0 données, calculez le potentiel chimique pour une température et une pression quelconques.
- (d) Quel est le lien entre S_0 et $\mu(P_0, T_0)$ pour que l'équation d'Euler $U = TS - PV + \mu N$ soit satisfaite?
- (e) Ecrivez l'entropie en termes de U , V et N et vérifiez que sa différentielle s'écrit bien comme $T dS = dU + P dV - \mu dN$.
-

Question posée à l'examen de janvier 2012

Un récipient de volume V contenant un gaz à la pression P_i et à la température T_i , est mis en communication avec un récipient identique mais initialement vide. Les deux récipients ont des parois rigides parfaitement calorifugées. Au bout d'un certain temps, le gaz occupe les deux récipients et atteint un état d'équilibre à la pression P_f et à la température T_f .

- (a) Précisez la nature réversible ou irréversible de la transformation en justifiant votre réponse.
- (b) Calculez le travail et la chaleur échangés au cours de cette transformation. En déduire la variation d'énergie interne du gaz.
- (c) En supposant que le gaz est parfait, exprimez la température T_f et la pression P_f en fonction de P_i , T_i et V .
- (d) Calculez la variation d'entropie associée à cette transformation.

Rappel Théorie :

• Gaz parfait : $U = \frac{3}{2} N k_B T$ et $PV = N k_B T$

Principes Thermodynamiques :

1) $dU = W + Q$

2) $S_f - S_i \geq Q/T$

(3) $\lim_{T \rightarrow 0} S(T) = 0$

$\rightarrow dU = T dS - P dV + \mu dN$

\rightarrow Gibbs-Duhem : $U = TS - PV + \mu N \Rightarrow S dT - V dP + N d\mu = 0$

Potentiel Thermodynamique :

$U = TS - PV + \mu N \Rightarrow dU = T dS - P dV + \mu dN$

• $F = U - TS = TS + \mu N$ (énergie libre de Helmholtz)

$\Rightarrow dF = -S dT - P dV + \mu dN$

• $H = U + PV = TS + \mu N$ (enthalpie)

$\Rightarrow dH = T dS + V dP + \mu dN$

• $I = U - \mu N = TS - PV$

$\Rightarrow dI = T dS - P dV - N d\mu$

• $G = U - TS + PV = \mu N$ (enthalpie libre de Gibbs)

$\Rightarrow dG = \mu dN - S dT + V dP$

• $S = U + PV - \mu N = TS$

$\Rightarrow dS = T dS + V dP - \mu dN$

• $\Xi = U - TS - \mu N = PV$

$d\Xi = T dS + V dP - N d\mu$

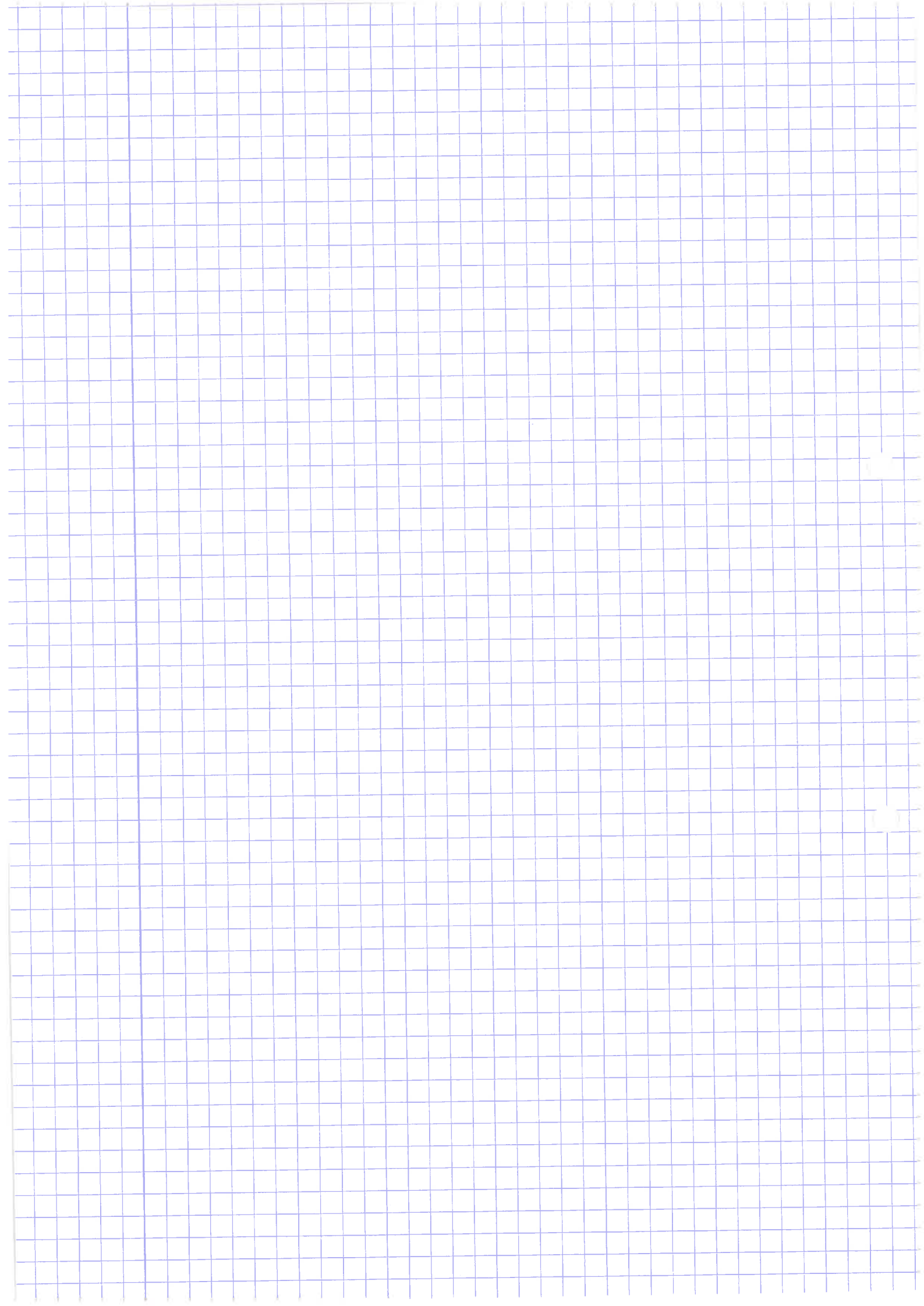
• $K = 0$

S	U	V
H	F	
P	G	T

+ d.h

relations de Maxwell :

$\left(\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V, N} \right)_{T, V} = \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T, V} \right)_{V, N} \Rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{T, N} = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{V, N}$



Thermo: Séance d'exo n° 1

EX: 1)

[Rappel: une différentielle est totale si ses dérivées croisées sont égales]
 $\rightarrow d_y(d_x f) = d_x(d_y f)$.

$$\bullet dz = 2(x+y)dx + xdy$$

$$\rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 2(x+y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

$$\rightarrow d_y(d_x z) = 2 \neq 1 = d_x(d_y z) \quad \rightarrow \text{NON!}$$

$$\bullet dz = \exp(x)(y dx + dy) = e^x y dx + e^x y dy$$

$$\rightarrow d_x z = e^x y \quad \text{et} \quad d_y z = e^x$$

$$\rightarrow d_y(d_x z) = e^x = e^x = d_x(d_y z) \quad \rightarrow \text{OUI!}$$

$$\bullet dz = \log(y) x dx + x^2 dy$$

$$\rightarrow d_x z = \log(y) x \quad \text{et} \quad d_y z = x^2$$

$$\rightarrow d_y(d_x z) = \frac{x}{y} \quad \text{et} \quad d_x(d_y z) = 2x \rightarrow \text{NON!}$$

EX: 2] Trouver a pour que les eq suivantes soient totales:

$$\bullet dz = (2x + y^a) dx + x dy$$

$$\Rightarrow a y^{a-1} = 1 \quad \Rightarrow a = 1$$

$$\bullet dz = y e^{ax} (y dx + dy)$$

$$\Rightarrow \cancel{2y} e^{ax} = \cancel{a y} e^{ax} \quad \rightarrow a = 2$$

EX 3) $dF = 4xz dx + 2z dy + 2(y+x^2) dz$

a) diff totale ? :

• $d_x(d_y F) = 0 = d_y(d_x F)$ ok!

• $d_x(z F) = 4x = d_z(d_x F)$ ok!

• $d_y(d_z F) = 2 = d_z(d_y F)$ ok!

→ dF est une différentielle totale.

b) Soit $F(0,0,0) = 0 \rightarrow F(2,1,1) - F(1,1,1) = ?$

• forme différentielle :

$$F(2,1,1) - F(1,1,1) = \int_{(1,1,1)}^{(2,1,1)} 4xz dx + \int_{(2,1,1)}^{(2,1,1)} 2z dy + \int_{(2,1,1)}^{(2,1,1)} 2(y+x^2) dz$$

$$= \left[2xz^2 \right]_{(1,1)}^{(2,1)} = 2 - 2 = 0$$

• forme explicite :

$$F(a,b,c) - F(0,0,0) = \int_{(0,0,0)}^{(a,0,0)} 4xz dx + \int_{(a,0,0)}^{(a,b,0)} 2z dy + \int_{(a,b,0)}^{(a,b,c)} 2(y+x^2) dz$$

$$= 2xz^2 \Big|_{0,0,0}^{a,0,0} + 2yz \Big|_{a,0,0}^{a,b,0} + 2z(y+x^2) \Big|_{a,b,0}^{a,b,c}$$

$$F(a,b,c) = 2c(b+a^2)$$

⇒ $F(2,1,1) = 10$ et $F(1,1,1) = 4$

⇒ $F(2,1,1) - F(1,1,1) = 6$.

⚡ au chemin d'intégration (autre des variables).

EX 4) $R = \text{cte}$

$$d_p V = -\frac{R}{p^2} \quad \text{et} \quad d_T V = \frac{R}{p}$$

$$dV = \frac{dV}{dP} dP + \frac{dV}{dT} dT = \frac{R}{p} dT - \frac{RT}{p^2} dP = \frac{R}{p} \left(dT - \frac{T}{p} dP \right)$$

→ diff tot ? :

$$d_T(d_p V) = -\frac{R}{p^2} \rightarrow \text{OK!}$$

$$d_p(d_T V) = -\frac{R}{p^2}$$

ex 5

Rappel : intensivité $\Leftrightarrow P(N) \Leftrightarrow P(kN) = P(N)$
 extensivité : $V(kN) = kV(N) \quad (\forall k \in \mathbb{R})$
 \rightarrow extensive: V, N, S, U, H, G
 intensive: P, T, μ

• $PV = (N_1 + N_2) RT \quad R = \text{cte.}$

intensif + extensif \rightarrow intensif + extensif \rightarrow ok!

• $PV^2 = aT^3 \sqrt{N_1^2 + N_2^2} \quad a = \text{cte.}$

(extensif)² \rightarrow extensif \rightarrow NON!

• $PV^2 = b(N_1^2 + N_2^2)T^3 \quad b = \text{cte.}$

(extensif)² \rightarrow (extensif)² \rightarrow ok!

ex 6

$$dU = a V^2 T^{3/2} dT + b V T^2 dV \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

1) extensif \rightarrow extensif³ + extensif \Rightarrow pas correcte

2) pas une diff totale \rightarrow pas conservatif \rightarrow pas une eq therm.

ex 7

$$P(V - Nb) = NRT \quad b \in \mathbb{R}$$

Travail de V_1 à V_2 avec $\mu = 0$ (isotherme)

$$\Delta U = W + Q$$

$$\rightarrow W = \Delta U = \underbrace{T dS}_{=0} - P dV + \underbrace{\mu dN}_{=0} = -P dV$$

$$\rightarrow P = \frac{NRT}{V - Nb} \quad \rightarrow W = \int_{V_1}^{V_2} -P dV = \frac{+NRT}{(V - Nb)^2}$$

EX 8

a) gaz parfait mono-atomique : $dU = \frac{3}{2} N k_B dT$ et $P = \frac{N k_B T}{V}$

$$dU = T dS - P dV + \mu \frac{dN}{N}$$

$$\Rightarrow dS = \frac{dU + P dV}{T} \quad \rightarrow \quad dS = \frac{\frac{3}{2} N k_B dT}{T} + \frac{N k_B dV}{V}$$

$$\Rightarrow \underbrace{S(T, V) - S(T_0, V_0)}_{S_0} = \int_{(T_0, V_0)}^{(T, V)} \frac{\frac{3}{2} N k_B dT}{T} + \int_{(T_0, V_0)}^{(T, V)} \frac{N k_B dV}{V}$$

$$S(T, V) = S_0 + \frac{3}{2} N k_B \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + N k_B \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$$

b) extensivité de S : $S(\lambda N) = \lambda S(N)$

$$\rightarrow \text{Si } \lambda = \frac{N}{N_0} \quad \text{et } S = S_0 + N k_B \left(\frac{3}{2} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) \right)$$

$$\rightarrow S(\lambda N_0) = \lambda S_0 + \lambda N_0 k_B (\ln(\dots) \dots)$$

$$\text{Si } \frac{S_0}{N_0 k_B} = s_0 \Rightarrow S(\lambda N_0) = N k_B s_0 + N k_B (\ln(\dots) \dots) \\ = N k_B (s_0 + (\ln(\dots) \dots)) = \lambda S(N_0)$$

$$\Rightarrow S(N) = \frac{N}{N_0} S(N_0)$$

$$\left(\text{appel } h = \frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0} \frac{P_0}{P} \right) \Rightarrow \boxed{S(N) = \frac{N S_0}{N_0} + N k_B \ln\left(\left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \left(\frac{P_0}{P}\right)\right)}$$

c) Si $\mu(P_0, T_0)$ connu $\rightarrow \mu(P, T) = ?$

$$\rightarrow S dT - V dP + N d\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad d\mu = \frac{V dP - S dT}{N}$$

$$\Rightarrow d\mu = \frac{k_B T}{P} dP - \left(N_0 k_B + \frac{5}{2} k_B \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + k_B \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) \right) dT$$

$$\Rightarrow \mu = \mu_0 + \int_{(P_0, T_0)}^{(P, T)} \frac{k_B T}{P} dP - \int_{(P_0, T_0)}^{(P, T)} \left(N_0 k_B + \frac{5}{2} k_B \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + k_B \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) \right) dT$$

$$= \mu_0 + \left[k_B T \ln(P) \right]_{(P_0, T_0)}^{(P, T)} - \left[N_0 k_B T \right]_{(P_0, T_0)}^{(P, T)} + \frac{5}{2} k_B \int_{T_0}^T (\ln(T) - \ln(T_0)) dT$$

$$= \mu_0 + k_B T_0 \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) - k_B N_0 (T - T_0) + \frac{5}{2} k_B \left([T \ln(T)]_{T_0}^T + [T \ln(T) - T]_{T_0}^T \right)$$

$$= \dots + \frac{5}{2} k_B (T \ln(T_0) - T \ln(T_0) + T \ln(T) - T_0 \ln(T_0) + T_0 - T)$$

$$\mu(P, T) = \mu_0 + k_B \left[T_0 \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) - N_0 (T - T_0) + \frac{5}{2} (T \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - (T - T_0)) \right]$$

ex 8

1d) lien entre S_0 et $\mu(P_0, T_0)$ pour l'eq $U = TS - PV + \mu N$

$$\mu(P, T, N_0) = \underbrace{\mu(P_0, T_0, N_0)}_{\mu_0} + \left(\frac{5}{2} - \lambda_0\right) k_B (T - T_0) - k_B T \ln\left(\left(\frac{T}{T_0}\right)^{5/2} \left(\frac{P_0}{P}\right)\right)$$

$$\frac{3}{2} N_0 k_B T = T \left(N_0 k_B \lambda_0 + N_0 k_B \ln\left(\left(\frac{T}{T_0}\right)^{5/2} \left(\frac{P_0}{P}\right)\right) - N_0 k_B T \right) + N_0 \left(\mu_0 + \left(\frac{5}{2} - \lambda_0\right) k_B (T - T_0) - k_B T \ln\left(\left(\frac{T}{T_0}\right)^{5/2} \left(\frac{P_0}{P}\right)\right) \right)$$

$$\frac{3}{2} N_0 k_B T = \cancel{N_0 k_B T \lambda_0} - \cancel{N_0 k_B T} + N_0 \mu_0 + \frac{5}{2} N_0 k_B (T - T_0) - \cancel{N_0 k_B (T - T_0)}$$

$$0 = N_0 \mu_0 + \frac{5}{2} N_0 k_B (T - T_0) + N_0 \lambda_0 k_B T_0$$

$$\Rightarrow \mu_0 = \frac{5}{2} k_B T_0 - \lambda_0 k_B T_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_0 = k_B T_0 \left(\frac{5}{2} - \lambda_0\right)}$$

e) écrire l'entropie en terme de U, V, N , et vérifier que sa différentielle s'écrit bien comme $TdS = dU + PdV - \mu dN$.

$$\rightarrow S(T, U, N) = N k_B \left(\lambda_0 + \ln\left(\left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \left(\frac{V}{V_0}\right)\right) \right)$$

$$\left[PV = N k_B T ; U = \frac{3}{2} N k_B T ; T = \frac{2U}{3 N k_B} ; \lambda_0 = \frac{S_0}{N_0 k_B} \right]$$

$$\rightarrow S = N k_B \lambda_0 + N k_B \ln\left(\left(\frac{2U}{3 N k_B T_0}\right)^{3/2} \left(\frac{V}{V_0}\right)\right) = \frac{N}{N_0} S_0 + N k_B \ln\left(\left(\frac{2U}{3 N k_B T_0}\right)^{3/2} \left(\frac{V}{V_0}\right)\right)$$

$$= N k_B \left[\lambda_0 + \ln\left(\left(\frac{2U}{3 N k_B T_0}\right)^{3/2} \left(\frac{V}{V_0}\right)\right) \right]$$

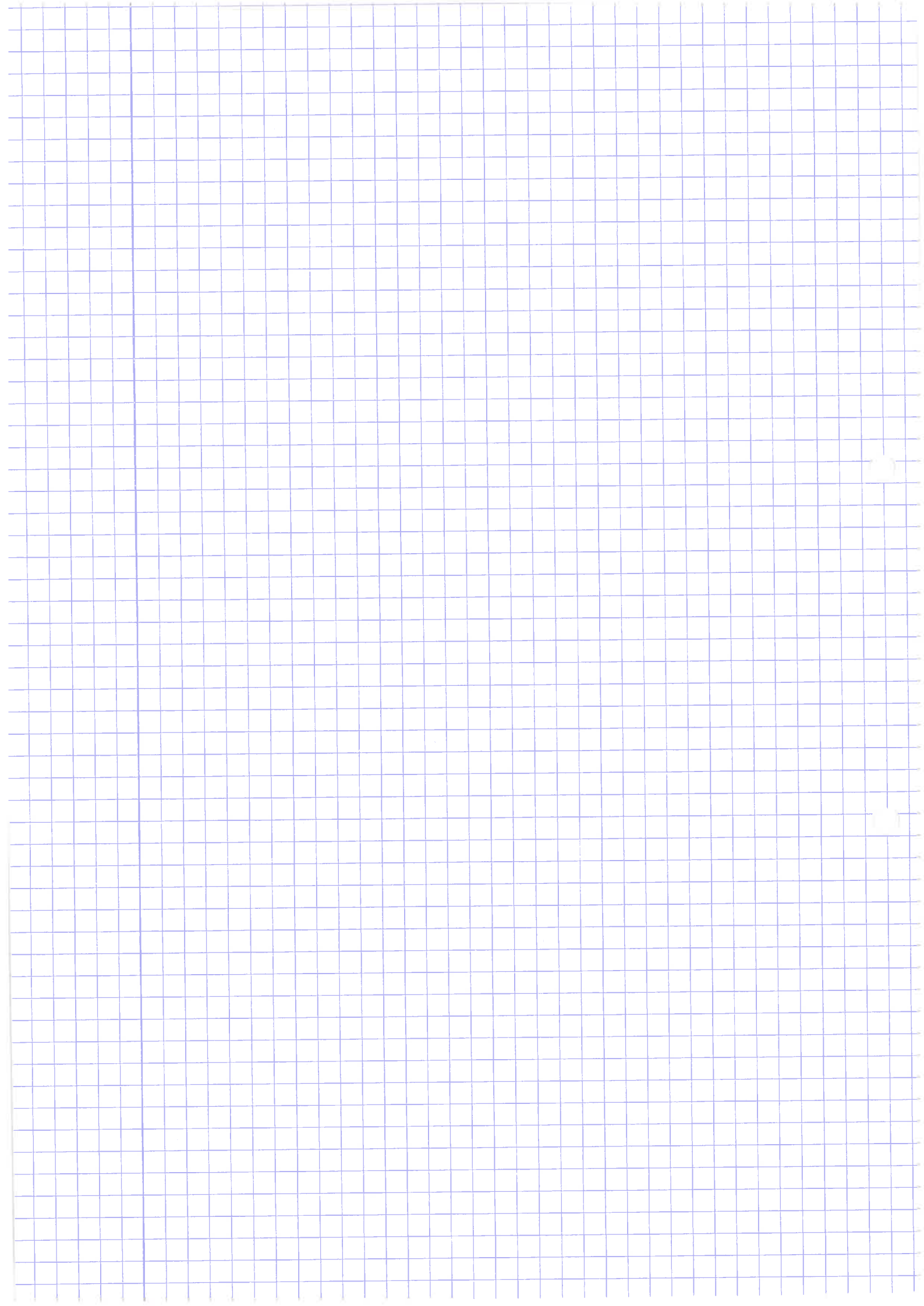
$$= \boxed{N k_B \left[\lambda_0 + \ln\left(\left(\frac{U}{U_0}\right)^{3/2} \left(\frac{N_0}{N}\right)^{3/2} \left(\frac{V}{V_0}\right)\right) \right]}$$

→ vérifie bien que :

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}$$

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{P}{T}$$

$$\frac{\partial S}{\partial N} = \frac{-\mu}{T}$$



PHYS-F-201 : 2ème série d'exercices

1. Considérez un système fermé de volume V fixé et en équilibre thermique avec un thermostat à la température T . Montrez à l'aide des deux premiers principes de la thermodynamique que l'état d'équilibre de ce système correspond au minimum de l'énergie libre de Helmholtz $F = U - TS$.

2. Considérez un système fermé en équilibre thermique avec un thermostat à la température T et en équilibre mécanique avec le milieu extérieur dont la pression P demeure constante. Montrez à l'aide des deux premiers principes de la thermodynamique que l'état d'équilibre de ce système correspond au minimum de l'enthalpie libre $G = F + PV$.

3. Considérez un système fermé d'entropie S constante en équilibre mécanique avec le milieu extérieur dont la pression P demeure constante. Montrez à l'aide des deux premiers principes de la thermodynamique que l'état d'équilibre de ce système correspond au minimum de l'enthalpie $H = U + PV$.

4. Pour un gaz dont l'équation d'état est donnée par $PV = NRT(1 + T/T_0)$, comment varie l'entropie d'un système fermé en fonction du volume dans des conditions isothermes? → $\frac{dS}{dV}|_T = ?$

5. Exprimez les paramètres a et b en termes de r et s pour que la relation $dF = (2rT + sV^b)dT + aTdV$ définisse une énergie libre de Helmholtz. Dans ce cas, calculez F .

6. Considérez un fluide dont le coefficient de compressibilité isotherme κ_T et le coefficient de dilatation thermique α sont donnés par $\kappa_T = B(1 + b(T - T_0))$ et $\alpha = A(1 - \gamma P)$ où $B = 2,52 \times 10^{-5} \text{ atm}^{-1}$, $b = 2 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, $T_0 = 273 \text{ K}$ et $A = 4,2 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$. Pour rappel, ces coefficients sont définis par :

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

Quelle est la valeur de γ ? A quelle température le fluide sous une pression de 100 atm a-t-il le même volume qu'à $T = 273 \text{ K}$ et $P = 0$?

7. Démontrez les relations suivantes pour un système fermé et sans réaction chimique :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P$$

$$\left(\frac{\partial(F/T)}{\partial T} \right)_V = -\frac{U}{T^2}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T = V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

$$\left(\frac{\partial(G/T)}{\partial T} \right)_P = -\frac{H}{T^2}$$

8. Démontrez la relation suivante :

$$\left(\frac{\partial C_p}{\partial P}\right)_T = -TV \left[\alpha^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_P \right].$$

9. Démontrez la relation suivante

1)

$$dU = C_V dT - \left[P - T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N} \right] dV + \left[\mu - T \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{V,N} \right] dN.$$

2) Déduisez de cette relation que, pour toute substance pour laquelle la pression est une fonction linéaire de la température, on a

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_{T,N} = 0.$$

3) Est-il possible de trouver une substance pour laquelle aussi bien la pression que le potentiel chimique soient des fonctions linéaires de la température ?

10. Considérez un gaz décrit par l'équation d'état de van der Waals $P = N k_B T / (V - bN) - aN^2/V^2$, a et b étant des constantes. La capacité calorifique à volume constant C_V sera supposée connue.

- Calculez le coefficient de dilatation thermique.
- Calculez le coefficient de compressibilité isotherme.
- Calculez la capacité calorifique à pression constante.

Question posée à l'examen d'août 2012

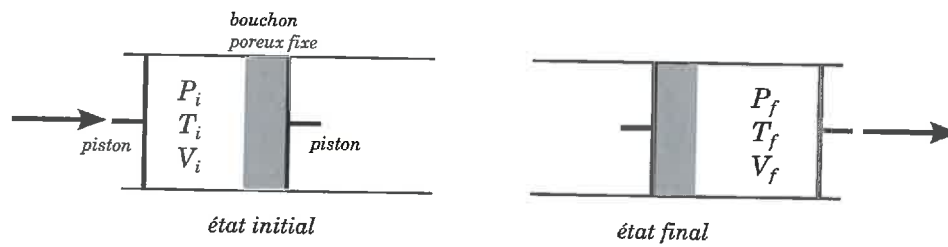
Un ruban de caoutchouc de longueur L_0 au repos exerce une force de tension donnée par la loi de Hooke $F = k(L - L_0)$ lorsqu'il est étiré d'une longueur $L - L_0$. Le coefficient k dépend généralement de la température T .

- Calculez le travail infinitésimal effectué pour allonger de manière réversible la longueur du ruban de L à $L + dL$.
- En admettant que l'énergie interne du ruban ne dépende que de la température, $U = CT^2$, donnez l'expression de la variation d'entropie lors d'une transformation réversible infinitésimale.
- En utilisant la relation de Maxwell, montrez que $k = KT$ où K est une constante caractéristique du ruban.
- Exprimez l'entropie du ruban en fonction de T et de L .

Question posée à l'examen de janvier 2013

Considérons l'écoulement d'un gaz dans une conduite à travers un bouchon poreux fixe comme l'illustre la figure ci-dessous. Le gaz est initialement maintenu dans un état d'équilibre thermodynamique à une pression P_i et à une température T_i par un piston. En poussant sur le piston de gauche, le gaz est amené de l'autre côté du bouchon de manière irréversible. Au bout d'un certain temps, le gaz atteint un nouvel état d'équilibre thermodynamique à une pression $P_f < P_i$ et à une température T_f . Les parois de la conduite sont parfaitement calorifugées.

- Calculez le travail échangé au cours de cette transformation.
- Montrez que l'enthalpie est conservée.
- Montrez que la variation d'enthalpie au cours d'une transformation infinitésimale quelconque est donnée par $dH = C_P dT + (k + V) dP$ où C_P désigne la capacité calorifique à pression constante et k la chaleur latente de compression.



(d) En vous servant d'une relation de Maxwell pour l'énergie de Gibbs, montrez que

$$k = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

(e) Montrez que la détente de Joule-Thomson s'accompagne d'un refroidissement du gaz si $\alpha T_i > 1$ et un échauffement dans le cas contraire où

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

est le coefficient de dilatation thermique du gaz. Calculez ce coefficient pour un gaz parfait. Que pouvez-vous en conclure ?

Séance 3: Série 2

Rappel:

$$(1) \Delta U = w + Q \quad (2) \Delta S \geq \frac{Q}{T}$$

$$(2) \text{ Diff totale, } \rightarrow \text{ Maxwell: } \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\partial P}{\partial T}$$

(3) relation de Maxwell:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_z = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_y + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_x \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_z$$

(4)

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_{T,N} ; \quad \alpha = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} \Big|_{P,N}$$

$$C_P = \frac{\partial H}{\partial T} \Big|_{P,N} ; \quad C_V = T \frac{\partial S}{\partial T} \Big|_{V,N}$$

$$\Rightarrow \text{Mayer: } C_P = C_V + \frac{T V \alpha^2}{\kappa_T}$$

ex 1) énergie libre de Helmholtz: $F = U - TS$

$v = \text{const}$; $T = \text{const}$

1^{er} principe) $\Delta U = W + Q$

or: $dW = -P_{\text{ext}} dV \stackrel{v=\text{const}}{=} 0 \Rightarrow W = 0$
 $\Rightarrow \Delta U = Q$

2^{em} principe) $\Delta S \geq Q/T$

$\Rightarrow T\Delta S \geq Q \Rightarrow T\Delta S \geq \Delta U$

$\Rightarrow T\Delta S - \Delta U \geq 0$

$\Rightarrow -\Delta F \geq 0 \Rightarrow \boxed{\Delta F \leq 0}$

ex 2)

Syst fermé: $N = \text{const}$; thermostat: $T = \text{const}$

eq méca à $P_{\text{ext}} = \text{const}$: P_{int} et $P_{\text{ext}} = \text{const} (\Rightarrow P = \text{const})$

enthalpie libre: $G = F + PV = U - TS + PV$

$N = \text{const} \Rightarrow dN = 0$; $T = \text{const} \Rightarrow dT = 0$; $P = \text{const} \Rightarrow dP = 0$

$\Delta U = W + Q = -P_{\text{ext}} \Delta V + T\Delta S + \underbrace{\mu}_{=0} \Delta N$

$\Rightarrow Q = \Delta U - W$

or $T\Delta S \geq Q \Rightarrow T\Delta S \geq \Delta U - W$

$\Rightarrow T\Delta S \geq \Delta U + P\Delta V$

$\Rightarrow \underbrace{T\Delta S - \Delta U - P\Delta V}_{= -\Delta G} \geq 0$

$\Rightarrow \boxed{\Delta G \leq 0}$

ex 3)

système fermé $\Rightarrow dN=0$, éq méca $\Rightarrow dP=0$

$$\text{et } dS=0$$

on cherche $H = U + PV$

$$1^{\text{er}} \text{ principe: } dU = W + Q \quad (\leftarrow -PdV + TdS + \mu dN)$$

$$2^{\text{e}} \text{ principe } dS \geq \frac{Q}{T} \Rightarrow \frac{Q}{T} \leq 0 \Rightarrow Q \leq 0$$

$$\Rightarrow dU - W \leq 0$$

$$\Rightarrow dU + PdV \leq 0$$

$$dH \leq 0$$

\rightarrow minimal sous ces contraintes.

ex 4)

isotherme $dT=0$

$$\text{et } P = \frac{NRT(1 + T/T_0)}{V}$$

$$\text{on cherche } \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T = ?$$

$$\text{on avec Maxwell: } \frac{\partial}{\partial T} \left(\left. \frac{\partial F}{\partial V} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial V} \left(\left. \frac{\partial F}{\partial T} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \left(\left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_V = \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T \right)$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{NRT}{V} + \frac{NRT^2}{VT_0} \right) = \frac{NR}{V} \left(1 + \frac{2T}{T_0} \right)$$

$$\text{Ex 5) } dF = (2\alpha T + \lambda v^b) dT + \alpha T dv$$

$$F = U - TS$$

$$\text{Maxwell} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial T} [\alpha T] = \alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial v} (2\alpha T + \lambda v^b) = \lambda \cdot b \cdot v^{b-1}$$

$$\Rightarrow \alpha = \lambda \cdot b \cdot v^{b-1}$$

$$\Rightarrow \alpha = \lambda \text{ et } b = 1$$

\rightarrow calculer F en intégrant dF

$$\int dF = \int (2\alpha T + \lambda v) dT + \int \alpha T dv$$

à va faire $(v_0, T_0) \rightarrow (v, T_0) \rightarrow (v, T)$.

$$F - F_0 = \int_{(v_0, T_0)}^{(v, T_0)} \lambda T dv + \int_{(v, T_0)}^{(v, T)} (2\alpha T + \lambda v) dT$$

$$= \left[\lambda T v \right]_{(v_0, T_0)}^{(v, T_0)} + \left[\alpha T^2 \right]_{(v, T_0)}^{(v, T)} + \left[\lambda v T \right]_{(v, T_0)}^{(v, T)}$$

$$= \lambda T_0 (v - v_0) + \alpha (T^2 - T_0^2) + \lambda v (T - T_0)$$

$$\Rightarrow F = F_0 + \alpha (T^2 - T_0^2) + \lambda (T v - T_0 v_0)$$

Thème: Séance 4)

ex 6) un fluide, soit $\kappa_T = B(1 + b(T - T_0))$
et $\alpha = A(1 - \gamma P)$

$$\text{soit } B = 2,25 \cdot 10^{-3} \text{ dm}^{-1}, \quad b = 2 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}, \quad T_0 = 273 \text{ K}$$

$$A = 4,2 \cdot 10^4 \text{ K}^{-1}$$

- γ :

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_T \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P$$

$$\text{différentielle totale: } \left. \frac{\partial \kappa_T}{\partial T} \right|_P = \left. \frac{\partial \alpha}{\partial P} \right|_T$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial T} B(1 + b(T - T_0)) = \frac{\partial}{\partial P} A(1 - \gamma P)$$

$$\Leftrightarrow Bb = A\gamma \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\gamma = \frac{Bb}{A} = 1,2 \cdot 10^7 \text{ dm}^{-1}}}$$

$$- \kappa_T = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_T \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P$$

$$\Rightarrow -V\kappa_T = \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_T \quad \text{et} \quad V\alpha = \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P \quad \Rightarrow \quad dV = \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_T dP + \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P dT$$

$$\Rightarrow dV = V\alpha dT - V\kappa_T dP$$

$$dV = VA(1 - \gamma P) dT - VB(1 + b(T - T_0)) dP$$

$$\Rightarrow V - V_0 = \int_{(P_0, T_0)}^{(T, P)} VA(1 - \gamma P) dT - \int_{(T, P_0)}^{(T, P)} VB(1 + b(T - T_0)) dP$$

$$\text{or } V - V_0 = 0 \quad (\text{hypothèse}).$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{A(1 - \gamma P_0)}(T - T_0) = \sqrt{B(1 + b(T - T_0))}(P - P_0)$$

$$\text{or } P_0 = 0$$

$$\Rightarrow A(T - T_0) = BP + BPb(T - T_0)$$

$$\Leftrightarrow (T - T_0)(A - BPb) = BP$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{BP}{A - BPb} + T_0 = \underline{\underline{278,1 \text{ K}}}$$

7) de montrer :

^u Syst^r fermé; Pas de réaction chimique ^r (*)

$$a) \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P$$

$$dU = Tds - PdV + \mu dt \oplus$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S}_{=-P} + \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V}_{=T} \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T}_{\rightarrow \text{Maxwell} := \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P \quad \square$$

$$b) \left(\frac{\partial (F/T)}{\partial T} \right)_V = -\frac{U}{T^2}$$

$$F = U - TS \Rightarrow \frac{F}{T} = \frac{U}{T} - S$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{U}{T} - S \right)_V = -\frac{U}{T^2} \quad \square$$

$$c) \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T = V - T \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_P$$

$$dH = Tds + VdP + \mu dt \oplus$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T = \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_S}_V + \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_P}_T \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T}_{\rightarrow \text{Maxwell} := -\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T = V - T \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_P \quad \square$$

$$d) \left(\frac{\partial (G/T)}{\partial T} \right)_P = -\frac{H}{T^2}$$

$$G = U - TS + PV = H - TS$$

$$\Rightarrow \frac{G}{T} = \frac{H}{T} - S$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{H}{T} - S \right) \right)_P = -\frac{H}{T^2} \quad \square$$

Ex 8):

$$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_{P,N}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial C_p}{\partial P} \right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right) \right) = \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right) \right)$$

$$d \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T = \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_S}_{=v} + \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_P}_{=T} \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T}_{\text{Maxwell} := - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P} = v - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial C_p}{\partial P} \right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(v - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right) \right)_P$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial C_p}{\partial P} \right)_T = \frac{\partial v}{\partial T} - \left[\frac{\partial T}{\partial T} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P + T \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \right)_P \right]$$

$$\therefore = \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P - T \left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \right)_P = -T \left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \right)_P$$

$$\alpha: \alpha = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P \Rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P = v \alpha$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial C_p}{\partial P} \right)_T = -T \left(\frac{d\alpha v}{dT} \right)_P$$

$$v = -T \left(v \left(\frac{d\alpha}{dT} \right)_P + \alpha \frac{dv}{dT} \right)$$

$$\Rightarrow v = -T \left(v \left(\frac{d\alpha}{dT} \right)_P + \alpha^2 v \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial C_p}{\partial P} \right)_T = -T v \left(\alpha^2 + \left(\frac{d\alpha}{dT} \right)_P \right)$$

□

ex: 9)

$$1) \text{ démontrer } dU = C_v dT - \left(P - T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{v,N} \right) dV + \left(\mu - T \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{v,T} \right) dN.$$

$$\rightarrow dU = T dS - P dV + \mu dN$$

$$\rightarrow dS = \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_{v,N} dT + \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_{T,N} dV + \left. \frac{\partial S}{\partial N} \right|_{v,T} dN$$

$$C_v = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_{v,N} \Rightarrow \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_{v,N} = \frac{C_v}{T}$$

$$\Rightarrow dU = C_v dT + T \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_{T,N} dV + T \left. \frac{\partial S}{\partial N} \right|_{v,T} dN - P dV + \mu dN.$$

$$= C_v dT - \left(P - T \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_{T,N} \right) dV + \left(\mu + T \left. \frac{\partial S}{\partial N} \right|_{v,T} \right) dN$$

et: Maxwell: $\rightarrow \left(\partial_v (\partial_T F) \right)_{v,N,T,N} = \left(\partial_T (\partial_v F) \right)_{v,N,T,N} \Rightarrow \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_{T,N} = \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_{v,N}$

ainsi que: $\left(\partial_T (\partial_N F) \right)_{v,N,T,N} = \left(\partial_N (\partial_T F) \right)_{v,N,T,N} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial T} = - \frac{\partial S}{\partial N}$

$$\rightarrow dU = C_v dT - \left(P - T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{v,N} \right) dV + \left(\mu - T \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{v,T} \right) dN. \quad \square$$

2) déduire de cette relation, que pour toute substance pour laquelle la pression est une fonction linéaire de la température, on a: $\left(\frac{\partial C_v}{\partial V} \right)_{T,N} = 0$

s. $P = aT \rightarrow \frac{\partial P}{\partial T} = a$

et on sait: $C_v = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_{v,N}$

$$\text{Or } \left(\frac{\partial C_v}{\partial V} \right)_{T,N} = \left(\frac{\partial}{\partial V} \left(T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_{v,N} \right) \right)_{T,N} = \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_{T,N}}_{=0 \text{ car } T=aT} \cdot \frac{\partial S}{\partial T} + T \cdot \left(\partial_v (\partial_T S) \right)$$

~~car~~
~~car~~
~~car~~

$$= T \cdot \left(\partial_v (\partial_T S) \right) = T \cdot \left(\partial_T (\partial_v S) \right) = T \cdot \left(\partial_T (\partial_T P) \right)_{v,N} = a$$

$$= T \cdot \frac{\partial(a)}{\partial T} = 0$$

\rightarrow car a est une constante.

3) "est-il possible de trouver une substance pour laquelle aussi bien la pression que μ sont des fonctions linéaires en T ?"

$$\left(\partial_v (\partial_T U) \right)_{v,N,T,N} = \left(\partial_T (\partial_v U) \right)_{v,N,T,N} \Leftrightarrow \frac{\partial C_v}{\partial V} = \frac{\partial P}{\partial T} - \frac{\partial T}{\partial T} \frac{\partial P}{\partial T} - T \frac{\partial a}{\partial T} = 0$$

$P = aT$ et $\mu = bT$: $\frac{\partial C_v}{\partial N} = 0 \rightarrow C_v$ ne dépend ni de V ni de N !

$\rightarrow C_v = \left(\frac{\partial C_v}{\partial T} \right) dT + 0 + 0 \rightarrow$ incompatible avec le fait que C_v ait extensivité ! non!

EX: 10 | un gaz (parfait de Van der Waals): $P = \frac{Nk_B T}{(V-bN)} - \frac{aN^2}{V^2}$

On suppose C_v connu.

a) calculer le coeff de dilatation thermique: $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$

$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T}$ en $T = \frac{(P + \frac{aN^2}{V^2})(V-bN)}{k_B N}$

de l'équation ~~on~~ $\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{1}{\frac{\partial P}{\partial V}}$

$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial V} = \frac{P}{bN} - \frac{aN}{bV^2} + \frac{abN^2}{V^3 k_B} = \frac{(PV^3 - aN^2V + abN^3)}{k_B NV^3}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{k_B NV^2}{(PV^3 - aN^2V + abN^3)}$

b) coeff. de compressibilité isotherme. $K_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T,N}$

$P = \frac{Nk_B T}{(V-bN)} - \frac{aN^2}{V^2} \Rightarrow Nk_B T = (V-bN) \left(P + \frac{aN^2}{V^2} \right)$

$\Rightarrow Nk_B T = PV - bNP + \frac{aN^2}{V} - \frac{abN^3}{V^2}$

on dérive par P en T = cste:

$0 = V + P \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T - bN - \frac{aN^2}{V^2} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T + \frac{2abN^3}{V^3} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$

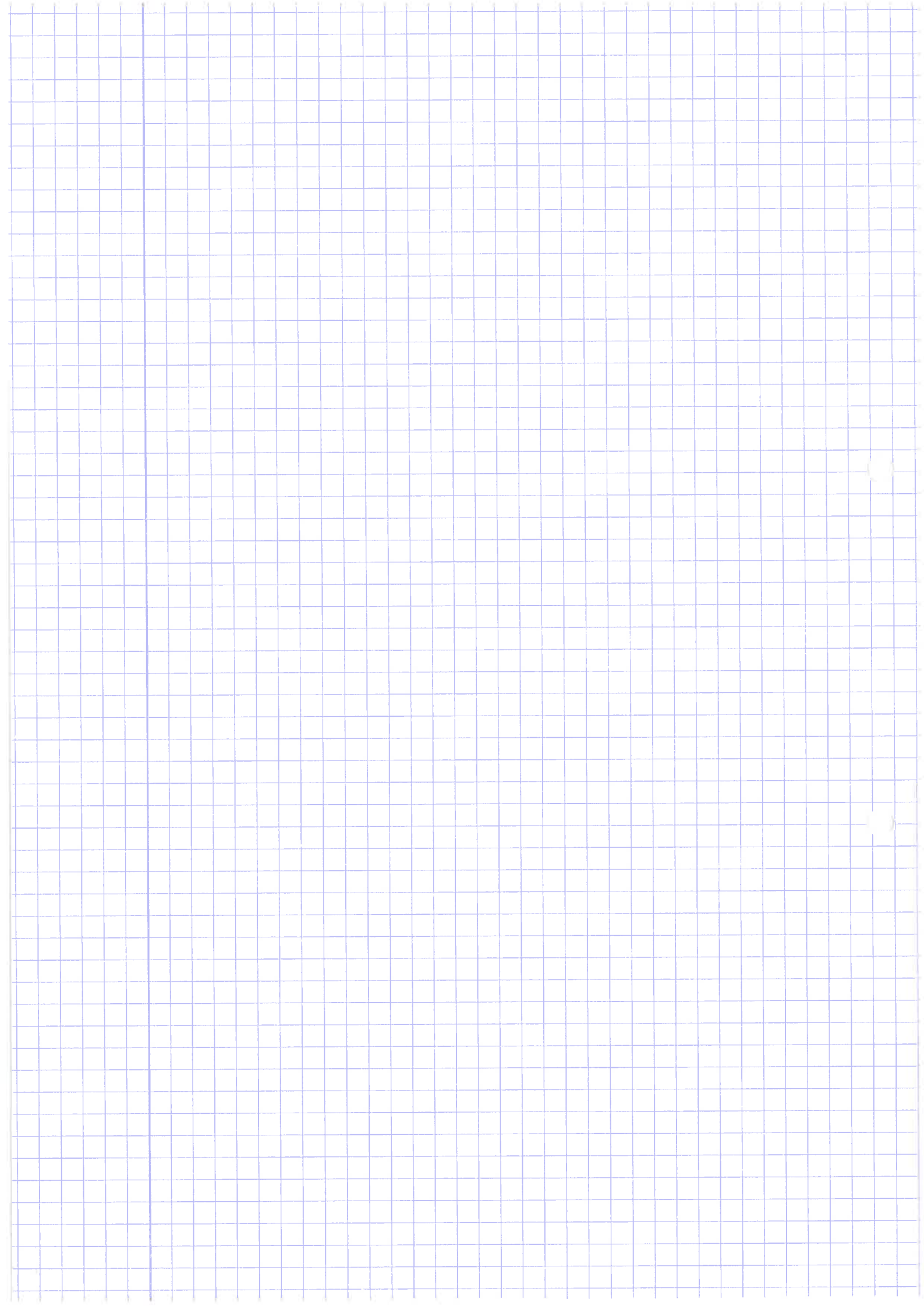
$\Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{bN - V}{\left(P - \frac{aN^2}{V^2} + \frac{2abN^3}{V^3} \right)}$

$\Rightarrow K_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{V - Nb}{\left(PV - \frac{aN^2}{V} + \frac{2abN^3}{V^2} \right)} \left(\rightarrow \frac{V}{PV} = \frac{1}{P} \right)$

c) capacité calorifique à P cste: $C_p = T \frac{dS}{dT} = \frac{dH}{dT}$

ou $C_p = C_v + \frac{\alpha^2 TV}{K_T}$ on mesure C_v : (Droger)

$\rightarrow C_p = C_v + \frac{k_B^2 N^2 T V^5}{(PV^3 - aN^2V + abN^3)^2} \cdot \frac{(bN - V)}{\left(PV - \frac{aN^2}{V} + \frac{2abN^3}{V^2} \right)}$



PHYS-F-201 : 3ème série d'exercices

-
1. Considérez un gaz de van der Waals ($P = N k_B T / (V - bN) - aN^2/V^2$) pour lequel C_V ne dépend pas de la température.
- Démontrez que $C_V = \bar{c}N$ où \bar{c} est une constante indépendante de T , de N et de V .
 - Que vaut \bar{c} dans la limite où a et b tendent vers 0 pour un gaz monoatomique ?
 - Calculez l'énergie interne en supposant que vous connaissiez l'énergie interne du système $U(V_0, T_0, N)$ pour un volume donné V_0 et une température donnée T_0 (suggestion : partez de l'expression de dU à N constant).
 - Calculez l'entropie en supposant que vous connaissiez l'entropie $S(V_0, T_0, N)$ pour un volume donné V_0 et une température donnée T_0 .
 - Utilisez ces résultats pour calculer les échanges de travail et de chaleur au cours de chacune des quatre transformations qui composent un cycle de Carnot pour un gaz de van der Waals.
 - Calculez le rendement d'une machine basée sur ce cycle et montrez qu'il est bien égal au rendement maximum calculé au cours pour un gaz parfait
-

Question posée à l'examen de janvier 2012

Jean-Joseph Étienne Lenoir proposa en 1859 le premier moteur deux temps à combustion interne. Son moteur fonctionnait selon le cycle de transformations suivantes d'un gaz : une compression isochore, une détente adiabatique suivie d'une contraction isobare. Le gaz sera supposé parfait et son nombre de particules constant au cours du cycle.

- Représentez ces transformations dans un diagramme pression vs volume.
- Calculez le rendement maximal de ce moteur en fonction des températures du gaz au cours des trois transformations ainsi que du rapport $\gamma = C_p/C_V$ des capacités calorifiques à pression constante et à volume constant respectivement.

Question posée à l'examen d'août 2012

Un gaz parfait est comprimé de façon isotherme d'une pression P_0 à une pression $P_1 > P_0$, la température étant T_0 . Le gaz est ensuite détendu adiabatiquement jusqu'à la pression P_0 . Ces opérations sont effectuées de manière réversible.

- Représentez ces transformations dans un diagramme pression vs température.
- Calculez la température finale T_1 .
- Les deux opérations précédentes sont répétées, la compression isotherme ayant lieu à la température T_1 . Calculez la nouvelle température finale T_2 du gaz.
- Montrez qu'en répétant un nombre $n \rightarrow +\infty$ opérations de compression-détente successives, il est possible de diminuer indéfiniment l'entropie du gaz. Que vous inspire ce résultat ?

Question posée à l'examen d'août 2013

Les moteurs à essence fonctionnent selon un cycle imaginé par Alphonse Beau de Rochas et Nikolaus Otto en 1860. Ce cycle repose sur les transformations suivantes d'un mélange d'air et d'essence : une compression adiabatique, suivie d'une combustion isochore (le volume du gaz étant alors V_{\min}), puis une détente adiabatique et enfin un refroidissement isochore (le volume du gaz atteignant V_{\max}). Le gaz sera supposé parfait et son nombre de molécules constant au cours du cycle.

- (a) Précisez dans quel cas, le rendement du moteur sera maximal.
- (b) Représentez ces transformations dans des diagrammes pression-volume et température-entropie.
- (c) Calculez le rendement maximal en fonction des volumes V_{\min} et V_{\max} ainsi que du rapport $\gamma = C_p/C_v$ des capacités calorifiques du mélange gazeux à pression constante et à volume constant respectivement.

Thema Série d'exo n°3 :

EX 1 | gaz de Van der Waals : $P = \frac{Nk_B T}{V - bN} - \frac{aN^2}{V^2}$

avec C_V indep de T .

• (a) (démontrez que $C_V = \bar{c}N$ avec \bar{c} indépendant de $T, V, \text{ et } N$) :

→ Par définition de $C_V \rightarrow$ Valeur constante et $d_V C_V = 0$

→ Par hypothèse, C_V n'est pas dépendant de T

et C_V est extensif et linéaire en N

donc \bar{c} doit être indep de N .

• (b) que vaut \bar{c} pour $a \text{ et } b \rightarrow 0$?

$\Rightarrow a \text{ et } b \rightarrow 0 \Rightarrow P = \frac{Nk_B T}{V} \rightarrow$ gaz monoatomique $\Rightarrow U = \frac{3}{2} Nk_B T$

du soit que $C_V = d_T U = \frac{3}{2} Nk_B$

$\Rightarrow \bar{c} = \frac{C_V}{N} = \frac{3}{2} k_B$

• (c) (Calculer l'énergie interne en connaissant $U(T_0, V_0, N)$) :

$\rightarrow dU = TdS - PdV$

Or $TdS = T \frac{dS}{dT} dT + T \frac{dS}{dV} dV$

$\Rightarrow dU = C_V dT + \left(T \frac{dP}{dT} \bigg|_{V,N} - P \right) dV$

(car $C_V = T \frac{dS}{dT}$ et $\frac{dS}{dV} = \frac{dP}{dT}$)

$\Rightarrow dU = C_V dT + \left(T \frac{Nk_B}{V-bN} - \frac{Nk_B T}{V-bN} + \frac{aN^2}{V^2} \right) dV$

$\Rightarrow dU = C_V dT + aN^2 dV \rightarrow$ intégration !

$U(V, T, N) - U(V_0, T_0, N) = \int_{(V_0, T_0, N)}^{(V, T, N)} \frac{aN^2}{V^2} dV + \int_{(V_0, T_0, N)}^{(V, T, N)} C_V dT$

$\Rightarrow U(V, T, N) = U(V_0, T_0, N) + aN^2 \left(\frac{1}{V_0} - \frac{1}{V} \right) + C_V (T - T_0)$

• (d) Calculer S en annulant $S(V_0, T_0, N)$:

$$- dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right) dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right) dV = \frac{C_V}{T} dT + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right) dV$$

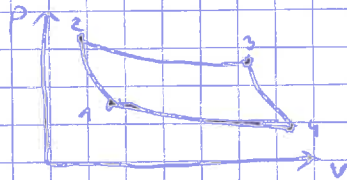
$$\Rightarrow dS = \frac{C_V}{T} dT + \frac{Nk_B}{V-bN} dV \quad \rightarrow \text{intégrer !}$$

$$\begin{aligned} S(V, T, N) &= S(V_0, T_0, N) + \int_{(T_0, V_0, N)}^{(T, V, N)} \frac{C_V}{T} dT + \int_{(T, V_0, N)}^{(T, V, N)} \frac{Nk_B}{V-bN} dV \\ &= S(V_0, T_0, N) + C_V \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + Nk_B \ln\left(\frac{V-bN}{V_0-bN}\right) \end{aligned}$$

• (e) Avec Thomas, calculer le travail et la chaleur échangés dans chaque transformation d'un cycle de Carnot:

$$\rightarrow \delta Q = ? \quad \text{et} \quad \delta W = ?$$

Cycle de Carnot :



(1 → 2): compression adiabatique:

$$\rightarrow \delta Q = 0 \quad \Rightarrow \Delta W = \Delta U = aN^2 \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) + C_V (T_2 - T_1)$$

(2 → 3): détente isotherme: ($T_2 = T_3$)

$$\begin{aligned} \delta Q &= T_2 \Delta S = T_2 \left(C_V \ln\left(\frac{T_2}{T_2}\right) + Nk_B \ln\left(\frac{V_3-bN}{V_2-bN}\right) \right) \\ &= T_2 Nk_B \ln\left(\frac{V_3-bN}{V_2-bN}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta W &= -P dV = - \int_{V_2}^{V_3} P dV = - \int_{V_2}^{V_3} \left(\frac{aNk_B T}{V-bN} - \frac{aN^2}{V^2} \right) dV = \int_{V_2}^{V_3} \frac{aN^2}{V^2} dV - \int_{V_2}^{V_3} \frac{Nk_B T}{V-bN} dV \\ &= -Nk_B T_2 \ln\left(\frac{V_3-bN}{V_2-bN}\right) + aN^2 \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_3}\right) \end{aligned}$$

(3 → 4): détente adiabatique: ($T_3 = T_4$)

$$\delta Q = 0 \quad \rightarrow \quad \delta W = C_V (T_3 - T_2) + aN^2 \left(\frac{1}{V_3} - \frac{1}{V_4}\right)$$

(4 → 1): compression isotherme:

$$\delta Q = T_1 Nk_B \ln\left(\frac{V_1-bN}{V_4-bN}\right)$$

$$\delta W = aN^2 \left(\frac{1}{V_4} - \frac{1}{V_1}\right) - Nk_B T_1 \ln\left(\frac{V_1-bN}{V_4-bN}\right)$$

• (f) rendement ? + un when qu'il est égale à celui d'un gaz parfait.

$$\rightarrow \eta = \frac{|\Delta W_{\text{net}}|}{\delta Q_{\text{in}}} \quad \delta Q_{\text{in}} = \delta Q_{(2 \rightarrow 3)}$$

$$\rightarrow \eta = \frac{|\Delta W_{(1 \rightarrow 2)} + (2 \rightarrow 3) + (3 \rightarrow 4) + (4 \rightarrow 1)|}{\delta Q_{(2 \rightarrow 3)}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \eta &= \left| a N^2 \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) + C_v (T_2 - T_1) + a N^2 \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_3} \right) - N k_B T_2 \ln \left(\frac{V_3 - bN}{V_2 - bN} \right) + C_v (T_1 - T_2) \right. \\ &\quad \left. + a N^2 \left(\frac{1}{V_3} - \frac{1}{V_4} \right) + a N^2 \left(\frac{1}{V_4} - \frac{1}{V_1} \right) - N k_B T_1 \ln \left(\frac{V_1 - bN}{V_4 - bN} \right) \right| \cdot \frac{1}{N k_B T_2 \ln \left(\frac{V_3 - bN}{V_2 - bN} \right)} \\ &= \left| -N k_B T_2 \ln \left(\frac{V_3 - bN}{V_2 - bN} \right) - N k_B T_1 \ln \left(\frac{V_1 - bN}{V_4 - bN} \right) \right| \cdot \frac{1}{N k_B T_2 \ln \left(\frac{V_3 - bN}{V_2 - bN} \right)} \end{aligned}$$

Main :

$$(1 \rightarrow 2) : \delta Q = 0 \Rightarrow \Delta S = 0$$

$$\Rightarrow N k_B \ln \left(\frac{V_2 - bN}{V_1 - bN} \right) = -C_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) \quad (*)$$

et (3 → 4) :

$$\Rightarrow N k_B \ln \left(\frac{V_1 - bN}{V_4 - bN} \right) = -C_v \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right) \quad (**)$$

$$\begin{aligned} \oplus \left(\text{Car } \Delta S &= \frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial V} dV = \frac{C_v}{T} dT + \frac{\partial P}{\partial T} dT = 0 \right. \\ &\Rightarrow \frac{C_v}{T} dT = -\frac{\partial P}{\partial T} dT \Rightarrow -C_v \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right) = N k_B \ln \left(\frac{V_1 - bN}{V_4 - bN} \right) \left. \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta Q_{(2 \rightarrow 3)} = -\delta Q_{(4 \rightarrow 1)}$$

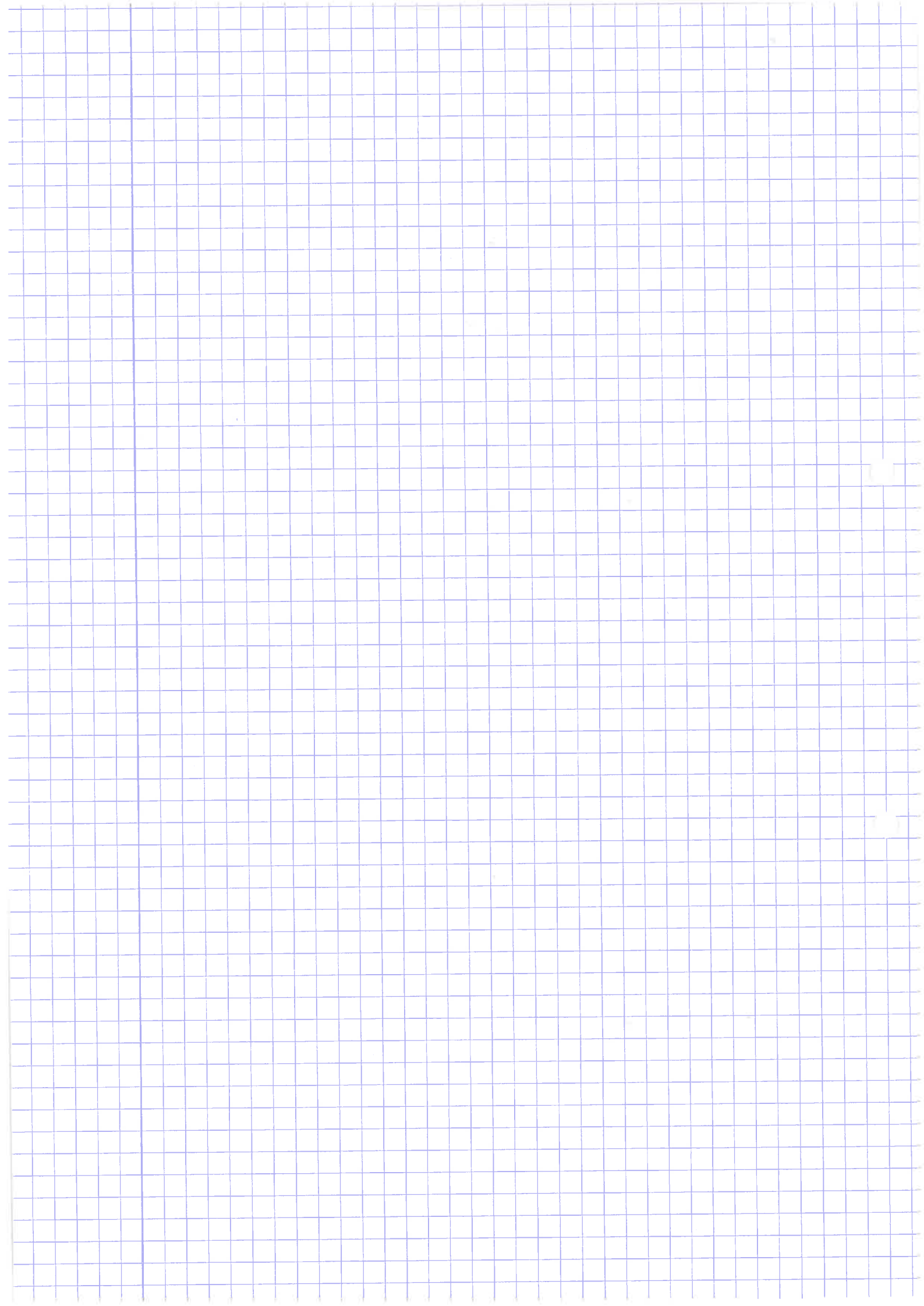
$$\Rightarrow \ln \left(\frac{V_1 - bN}{V_4 - bN} \right) = \ln \left(\frac{V_3 - bN}{V_2 - bN} \right)$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{N k_B \ln(\dots)}{N k_B \ln(\dots)} \cdot \frac{|T_1 - T_2|}{T_2} = \frac{|T_1 - T_2|}{T_2}$$

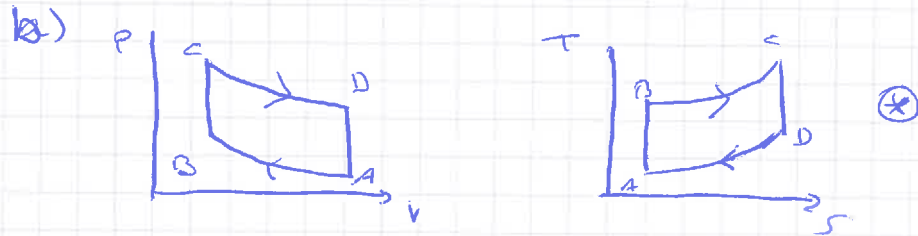
On $T_2 > T_1$

$$\Rightarrow \eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

→ YAY ! ok!



AOÛT 2013 : cycle Otto - Recher.



$$\textcircled{X} \delta Q \Rightarrow \Delta S = 0$$

$$\text{or } dS = \frac{dQ}{T} = c_v \frac{dT}{T} \Rightarrow S = c_v \ln T + S_0$$

$$\Rightarrow T \propto \exp\left(\frac{S}{c_v}\right)$$

a) pour une transfo réversible.

$$c) \eta = \frac{|W_{\text{net}}|}{\delta Q_{\text{rejet}}} = \frac{|W_{\text{net}}|}{Q_{BC}}$$

$$dU = W + Q = W + Q_{BC} + Q_{DA} = 0$$

$$\Rightarrow W = -(Q_{BC} + Q_{DA})$$

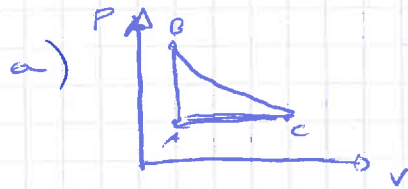
$$\Rightarrow \eta = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}}$$

$$\text{or } Q_{DA} = c_v (T_A - T_D) ; Q_{BC} = c_v (T_C - T_B)$$

$$\Rightarrow \eta = 1 + \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B} < 1$$

?

Examen 2012: cycle de Lenoir:



b)

$$\eta = \frac{|W_{\text{tot}}|}{\int Q_{\text{reçue}}} = \frac{|W_{\text{tot}}|}{Q_{AB}}$$

① : $dU = W + Q_{\text{tot}} = W + Q_{AB} + Q_{CA} = 0$ (cycle)

$\Rightarrow W = -(Q_{AB} + Q_{CA})$

$\Rightarrow \eta = 1 + \frac{Q_{CA}}{Q_{AB}}$

$$\left. \begin{aligned} Q &= T ds = T \int \frac{ds}{T} + \underbrace{T ds}_{=0} \\ \Rightarrow Q &= C_v dT \end{aligned} \right\}$$

• $A \rightarrow B$: $U = cvr \Rightarrow Q_{AB} = C_v (T_B - T_A)$

• $C \rightarrow A$: compression $\Rightarrow Q_{CA} = C_p (T_A - T_C)$

$\Rightarrow \eta = 1 + \frac{C_p (T_A - T_C)}{C_v (T_B - T_A)} = 1 + \gamma \frac{(T_A - T_C)}{(T_B - T_A)} = 1 - \gamma \frac{T_C - T_A}{T_B - T_A} < 1$

PHYS-F-201 : 4ème série d'exercices

1. Considérez la distribution de Maxwell-Boltzmann

$$f(\vec{v}) = N \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{d/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) \quad (1)$$

où d est la dimension de l'espace et utilisez la formule suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (2)$$

pour

- évaluez le module moyen de la vitesse pour des systèmes uni-, bi- et tri-dimensionnels ;
- évaluez la vitesse la plus probable pour des systèmes uni-, bi- et tri-dimensionnels ;
- évaluez l'énergie cinétique moyenne pour des systèmes uni-, bi- et tri-dimensionnels ;
- donnez une valeur numérique au module moyen de la vitesse et à la vitesse la plus probable pour l'azote à 20 degrés Celsius.

2. Supposez qu'un gaz parfait monoatomique soit placé dans une boîte cubique de côté L dans un champ de pesanteur caractérisé par une accélération constante g .

- Quelle est la forme de l'énergie d'une molécule si on néglige tous les degrés de liberté interne ?
- Calculez l'énergie moyenne en supposant que la probabilité d'observer une particule avec une position et une vitesse données est proportionnelle à l'exponentielle de l'énergie divisée par $k_B T$.
- Évaluez la partie provenant de l'énergie potentielle dans les limites des très hautes et des très basses températures.
- Évaluez la partie provenant de l'énergie potentielle dans les limites des grandes ou des très petites boîtes.
- Calculez la capacité calorifique à volume constant et évaluez ses limites à très basses et très hautes températures.
- Évaluez le profil de pression en fonction de la hauteur dans l'hypothèse où la température est constante dans toute la boîte.
- Utilisez ce résultat pour estimer la pression dans un village à 2 000 m d'altitude lorsqu'il y fait 20 degrés Celsius, si simultanément la pression au niveau de la mer à 20 degrés Celsius est de 1 atmosphère.

3. La distribution de Maxwell-Boltzmann permet de calculer la valeur moyenne de l'énergie du système U . Elle permet aussi de calculer l'écart type de l'énergie ΔU .

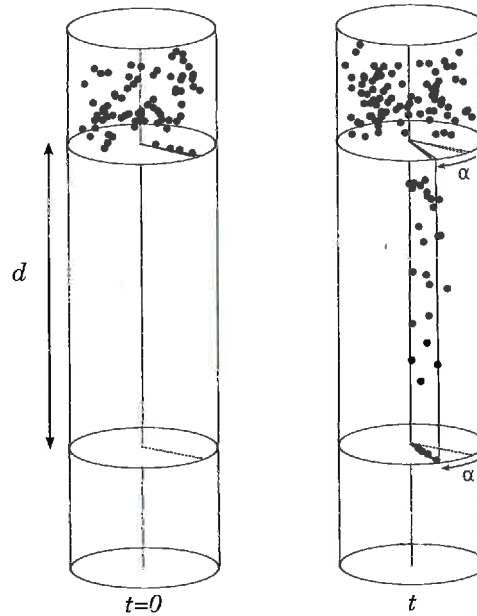
- Évaluez $\Delta U/U$.
 - Que peut-on en conclure dans la limite thermodynamique $N \rightarrow +\infty$?
 - Donnez une valeur numérique à l'énergie U contenue dans un m^3 de gaz parfait monoatomique à pression atmosphérique et à une température de 25 degrés Celsius. Évaluez également ΔU et à $\Delta U/U$?
-

Question posée à l'examen de janvier 2014

En 1927, John A. Eldridge proposa une méthode expérimentale pour mesurer la distribution des vitesses des molécules d'un gaz. Un tube renferme deux disques coaxiaux et solidaires, distants de d , et tournant à la même vitesse angulaire Ω . De la vapeur de cadmium est injectée dans le tube. Les atomes pénètrent à l'instant $t = 0$ par une fente d'aire Σ percée dans le premier disque. Ils viennent ensuite se déposer sur le second disque en position angulaire α à l'instant t . Nous rappelons que d'après la distribution de Maxwell-Boltzmann, le nombre d'atomes dont la vitesse est comprise entre v et $v + dv$ est donné par

$$dN = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv,$$

où N est le nombre total d'atomes, m leur masse, k_B la constante de Boltzmann et T la température.



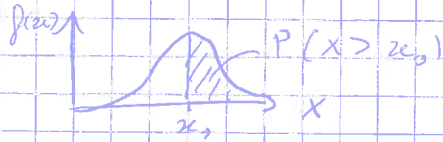
- Montrez que le nombre dN_Σ d'atomes traversant le premier disque par unité de temps, et dont la vitesse est comprise entre v et $v + dv$ est proportionnel à $v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv$.
- Montrez que $\alpha = C/v$ en précisant la constante C .
- Déduisez que la densité angulaire d'atomes déposés sur le second disque est $\frac{dN_\Sigma}{d\alpha} \propto v^5 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)$.
- Sachant que l'épaisseur e de la couche d'atomes déposés sur le disque est proportionnelle à la densité angulaire, déterminez l'angle α_{\max} pour lequel e est maximale. Montrez que la mesure de cet angle permet de déterminer la masse des atomes.

Série 4: Distributions

distribution de proba:

X : variable aléatoire

fixe dx donne la proba de trouver X entre x et $dx+x$.



$$\langle X \rangle = \int_0^{\infty} f(x) \cdot x \cdot dx$$

$$\Delta X = ((\langle X \rangle - x)^2)^{1/2}$$

$$\rightarrow \langle |\vec{r}| \rangle = \frac{1}{N} \iint_{\mathbb{R}^d} |\vec{r}| f(\vec{r}) d^d \vec{r} \quad (\text{valeur la plus probable})$$

Rappel:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (\text{voir COI-1}).$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x^2} dx \rightarrow u = \alpha x^2 \rightarrow du = 2\alpha x dx$$

$$\rightarrow \int_0^{\infty} \frac{1}{2\alpha} e^{-u} du = \frac{1}{2\alpha} [-e^{-u}]_0^{\infty} = \frac{1}{2\alpha}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx &= \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{2\alpha} \frac{d}{dx} e^{-\alpha x^2} \right) dx = -\frac{1}{2\alpha} \left(\int_0^{\infty} \frac{d}{dx} e^{-\alpha x^2} dx \right) \\ &= -\frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{2} \alpha^{-3/2} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^3 e^{-\alpha x^2} dx &= \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{\alpha} x \frac{d}{dx} e^{-\alpha x^2} \right) dx = -\frac{1}{\alpha} \left(\int_0^{\infty} x \frac{d}{dx} e^{-\alpha x^2} dx \right) \\ &= -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{2\alpha} \right) = \frac{1}{2\alpha^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx &= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha} x^2 \frac{d}{dx} e^{-\alpha x^2} \right) dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} x^2 \frac{d}{dx} e^{-\alpha x^2} dx \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \alpha^{-3/2} \right) = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} x^6 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{15}{16} \left(\frac{\pi}{\alpha^7} \right)^{1/2}$$

Ex: 11

distribution de Maxwell-Boltzmann: $f(\vec{v}) = N \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{d}{2}} \exp\left(\frac{-m v^2}{2k_B T} \right)$

a) calculer $\langle |\vec{v}| \rangle$ en $d=1$.

$$\begin{aligned} \langle |\vec{v}| \rangle &= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{v}| f(\vec{v}) dv \\ &= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} N \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-m v^2}{2k_B T} \right) dv \cdot |\vec{v}| \\ &= \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{v}| e^{-\alpha v^2} dv ; \text{ avec } \alpha = \frac{m}{2k_B T} \\ &= \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot \int_0^{\infty} |\vec{v}| e^{-\alpha v^2} dv = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot \frac{k_B T}{m} \\ &= \sqrt{\frac{2 k_B T}{m}} \end{aligned}$$

en $d=2$:

$$\langle |\vec{v}| \rangle = \frac{1}{N} \iint \frac{m}{2\pi k_B T} \cdot \exp\left(\frac{-m v^2}{2k_B T} \right) dv^2$$

→ changement de variable polaire: (v, θ)

$$= \frac{m}{2\pi k_B T} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} v^2 e^{-\alpha v^2} dv \quad \text{avec } \alpha = \frac{m}{2k_B T}$$

$$= \frac{m}{2\pi k_B T} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^3}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m}}$$

en $d=3$:

$$\langle |\vec{v}| \rangle = \frac{1}{N} \iiint_{\mathbb{R}^3} |\vec{v}| N \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{-m v^2}{2k_B T} \right) dx dy dz$$

coord sphérique: $dx dy dz \rightarrow v^2 \sin(\varphi) dv d\theta d\varphi$

$$\Rightarrow \langle |\vec{v}| \rangle = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^{\infty} v^3 e^{-\alpha v^2} dv \quad (\alpha = \frac{m}{2k_B T})$$

$$\Rightarrow \langle |\vec{v}| \rangle = \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2\alpha^2} = \sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi^2} \cdot \frac{\pi}{\alpha^2}} = 2 \sqrt{\frac{1}{\pi \alpha}}$$

$$= 2 \sqrt{\frac{2 k_B T}{\pi m}}$$

b) Evaluer la vitesse la plus probable: (maximiser $f(\vec{v})$).

• $d=1$:

$$f(\vec{v}) = f(|\vec{v}|) = N \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{1/2} e^{-\alpha v^2}$$

$$d_v f(\vec{v}) = -2\alpha |\vec{v}| f(\vec{v}) \rightarrow \text{s'annule en } \boxed{|\vec{v}|=0} !$$

• $d=2$:

$$f(\vec{v}) = f(|\vec{v}|, \theta) \Rightarrow f(\vec{v}) dx dy = \underbrace{f(|\vec{v}|)}_{f(|\vec{v}|)} \cdot \underbrace{2\pi |\vec{v}|}_{f(|\vec{v}|)} d|\vec{v}|$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d_v (2\pi |\vec{v}| f(\vec{v})) &= 2\pi f(\vec{v}) - 2\alpha |\vec{v}| f(\vec{v}) \cdot 2\pi |\vec{v}| \\ &= 2\pi (1 - |\vec{v}|^2 (2\alpha)) f(\vec{v}) \end{aligned}$$

On $f(\vec{v})$ est une exponentielle (ne s'annule pas)

$$\Rightarrow d_v f(|\vec{v}|) = 0 \Leftrightarrow |\vec{v}|^2 = \frac{1}{2\alpha} = \frac{k_B T}{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{v}| = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}}$$

• $d=3$:

$$f(\vec{v}) dx dy dz = 4\pi |\vec{v}|^2 f(|\vec{v}|) dv$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d_v f(\vec{v}) &= 4\pi f(\vec{v}) \cdot 2|\vec{v}|^2 - 4\pi |\vec{v}|^2 \cdot 2\alpha |\vec{v}| f(\vec{v}) \\ &= 8\pi f(\vec{v}) (|\vec{v}| - \alpha |\vec{v}|^3) \end{aligned}$$

On $f(\vec{v}) \neq 0 \Rightarrow$ s'annule $\Leftrightarrow |\vec{v}| - \alpha |\vec{v}|^3 = 0$

$$\Leftrightarrow |\vec{v}| = \alpha |\vec{v}|^3 \Leftrightarrow |\vec{v}|^2 = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2 k_B T}{m}}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{v}| = \sqrt{\frac{2 k_B T}{m}}}$$

c) évaluer l'énergie cinétique moyenne en $d=1, 2, 3$.

$$\langle E \rangle = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^d} E \cdot f(\vec{v}) d\vec{v}$$

$d=1$ ($\alpha = \frac{m}{2k_B T}$)

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m v^2}{2} f(v) dv = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m v^2}{2} N \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\alpha v^2} dv \\ &= m \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 e^{-\alpha v^2} dv = m \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{\alpha^3}\right)^{1/2} \\ &= \frac{m}{4\alpha} = \boxed{\frac{k_B T}{2} = \langle E \rangle} \end{aligned}$$

$d=2$ ($\alpha = \frac{m}{2k_B T}$)

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{1}{N} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{m v^2}{2} N \frac{\alpha}{\pi} e^{-\alpha v^2} dx dy \\ &= \frac{2\pi m \alpha}{2\pi} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\alpha v^2} dv = m \alpha \cdot \left(\frac{1}{2\alpha^2}\right) \\ &= \frac{m}{2\alpha} = \boxed{k_B T = \langle E \rangle} \end{aligned}$$

} coord polaires (calculer)

$d=3$ ($\alpha = \frac{m}{2k_B T}$)

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{m v^2}{2} N \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\alpha v^2} dv \quad \text{coord sphériques} \\ &= \frac{2\pi \cdot m \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}}{2} \int_0^{\infty} v^4 e^{-\alpha v^2} dv = 2\pi m \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{3}{4\pi} \left(\frac{\pi}{\alpha^3}\right)^{1/2} \\ &= \frac{3}{4} m \frac{\pi \cdot \pi^{-3/2} \cdot \pi^{1/2}}{\pi^0 = 1} \cdot \frac{\alpha^{3/2} \cdot \alpha^{-5/2}}{\pi^{-1}} = \frac{3m}{4\alpha} = \boxed{\frac{3}{2} k_B T = \langle E \rangle} \end{aligned}$$

\Rightarrow donc on peut conclure que en général $\langle E \rangle = \frac{d}{2} k_B T$

d) diiode : $m = 28 \text{ UMA}$, $T = 20^\circ\text{C} = 293,15 \text{ K}$

$$\langle |\vec{v}| \rangle = \sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m}} \approx 370 \text{ m/s}$$

$$\vec{v} \text{ le plus probable : } \sqrt{\frac{2 k_B T}{m}} = 417 \text{ m/s}$$

$$m = \frac{M_m}{N_A} = \frac{28 \text{ g/mol}}{6,02 \cdot 10^{23}} = 4,65 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

2) Supposons un gaz parfait mono-atomique, placé dans une boîte cubique de taille L dans un champ de pesanteur, avec une accélération g .

a) Quelle est la forme de l'énergie de la molécule si on néglige les degrés de liberté interne ?

$$U = \frac{m}{2} v^2 + U_{\text{pot}} + E_{\text{interact}} \\ \Rightarrow \boxed{U = m v^2 + m g h}$$

b) Calculer l'énergie moyenne en supposant que $f(h, \vec{v}) = A e^{-U/k_B T}$

• Calcul de A (normalisation $\rightarrow \int_0^L \int_{\mathbb{R}^3} f(h, \vec{v}) dh d\vec{v} = 1$)

\rightarrow il faut que $\int_0^L \int_{\mathbb{R}^3} f(h, \vec{v}) dh d\vec{v} = N$

$$\Leftrightarrow \int_0^L \int_0^{+\infty} 4\pi v^2 A e^{-\frac{m}{2k_B T} (v^2 + gh)} dh dv = N$$

$$\Leftrightarrow N = 4\pi A \int_0^L e^{-\frac{mgh}{k_B T}} dh \int_0^{+\infty} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv$$

$$\begin{cases} \int_0^L e^{-\alpha h} dh = \left[-\frac{e^{-\alpha h}}{\alpha} \right]_0^L = -\frac{e^{-\alpha L}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} = \frac{k_B T (1 - e^{-\frac{mgL}{k_B T}})}{mg} \\ \int_0^{+\infty} v^2 e^{-\alpha v^2} dv = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \sqrt{\pi} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow N = 4\pi A \cdot \frac{k_B T}{mg} (1 - e^{-\frac{mgL}{k_B T}}) \cdot \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \left(\frac{2k_B T}{m} \right)^{3/2} \\ = A \cdot \frac{k_B T}{mg} (1 - e^{-\frac{mgL}{k_B T}}) \cdot \left(\frac{2\pi k_B T}{m} \right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = N \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \frac{mg}{k_B T} (1 - e^{-\frac{mgL}{k_B T}})^{-1}} \quad (*)$$

• Calcul de $\langle E \rangle$. (pour N particules)

$$\Rightarrow \langle E \rangle = \int_0^L \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{mv^2}{2} + mgh \right) f(h, \vec{v}) dh d\vec{v}$$

$$= \int_0^L \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{mv^2}{2} \right) f(h, \vec{v}) dh d\vec{v} + \int_0^L \int_{\mathbb{R}^3} (mgh) f(h, \vec{v}) dh d\vec{v}$$

$$= \textcircled{1} + \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}: \int_0^L \int_{\mathbb{R}^3} \frac{mv^2}{2} A e^{-\frac{m}{2k_B T} (v^2 + gh)} dh d\vec{v} = \int_0^L e^{-\frac{mgh}{k_B T}} dh \int_0^{+\infty} 4\pi A v^2 \frac{mv^2}{2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv \\ = 4\pi A m \left[\frac{k_B T}{mg} (1 - e^{-\frac{mgL}{k_B T}}) \right] \cdot \int_0^{+\infty} v^4 e^{-\alpha v^2} dv \\ = 4\pi A m \left[\frac{k_B T}{mg} (1 - e^{-\frac{mgL}{k_B T}}) \right] \cdot \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left(\frac{m}{2k_B T} \right)^{-5/2} \\ \textcircled{2} \rightarrow N \alpha^{3/2} \pi^{3/2} \left(\frac{2k_B T}{m} \right)^{-3/2} \left(\frac{2k_B T}{m} \right)^{-5/2} L^2$$

$$\Rightarrow \textcircled{1} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{3k}{m}} \cdot N \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{-5/2} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3k}{m}} N \frac{k_B T}{m}$$

$$= \frac{3}{2} N k_B T$$

$$\textcircled{2} = \int_0^L mgh \cdot e^{-\frac{mgh}{k_B T}} \int_0^a 4\pi A v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv$$

$$= 4\pi A m g \int_0^L h e^{-ah} \int_0^a v^2 e^{-\alpha v^2} dv \quad \left(a = \frac{mg}{k_B T} \text{ et } \alpha = \frac{m}{2k_B T} \right)$$

$$= 4\pi A m g \left[\frac{L e^{-aL}}{a} - \frac{e^{-aL}}{a^2} + \frac{1}{a^3} \right] \cdot \left[\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\alpha^3}} \right] = 4\pi A m g \left(\frac{L e^{-aL}}{a^2} - \frac{L e^{-aL}}{a} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \right)$$

$$= \left(N \sqrt{\frac{3k}{m}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} a (1 - e^{-aL}) \cdot \frac{1}{a} \left[-L e^{-aL} + \frac{(1 - e^{-aL})}{a} \right] \sqrt{2} a^{3/2}$$

$$= N k_B T \left[\frac{L e^{-aL}}{(1 - e^{-aL})} + 1 \right] = N k_B T \left(\frac{-aL e^{-aL} + 1 - e^{-aL}}{(1 - e^{-aL})} \right)$$

$$= N k_B T \left(\frac{1 - (1 + aL) e^{-aL}}{(1 - e^{-aL})} \right)$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \Rightarrow \left(\langle E \rangle = N k_B T \left(\frac{3}{2} + \frac{1 - (1 + aL) e^{-aL}}{(1 - e^{-aL})} \right) \right) \rightarrow \text{ok!}$$

c) "évaluer la partie de U dans les limites de grandes et très petites températures"

• $\lim_{T \rightarrow +\infty} U_{\text{pot}} = ?$ quand $T \rightarrow +\infty$; $\frac{mgh}{k_B T} \rightarrow 0 \rightarrow e^{-x} \approx 1 - x$

$$\Rightarrow U = \underbrace{\frac{3}{2} N k_B T}_{U_{\text{cin}}} + \underbrace{N k_B T \left(\frac{1 - (1 + \frac{mgh}{k_B T}) e^{-\frac{mgh}{k_B T}}}{(1 - e^{-\frac{mgh}{k_B T}})} \right)}_{U_{\text{pot}}}$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} N k_B T \left(\frac{1 - (1 + x) e^{-x}}{1 - e^{-x}} \right) = a + \left(\frac{1-1}{1-1} \right)$$

\rightarrow développement en série de Taylor: $e^{-x} \approx 1 - x + \frac{x^2}{2}$

$$= N \cdot \frac{mgh}{x} \left(\frac{1 - (1+x) e^{-x}}{(1 - e^{-x})} \right) \approx N m g h \left(\frac{1 - (1+x)(1 - x + \frac{x^2}{2})}{(x + x - \frac{x^2}{2})} \right)$$

$$= N \frac{mgh}{x} \left(\frac{\frac{x}{2}(2-x)}{x(1 - \frac{x}{2})} \right) = N m g L \left(\frac{(1-x)}{(2-x)} \right)$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} U_{\text{pot}} = \lim_{x \rightarrow 0} N m g L \left(\frac{1-x}{2-x} \right) = \frac{N m g L}{2} \quad (\text{Vok!})$$

• $\lim_{T \rightarrow 0} U_{\text{pot}} :$ en $T \rightarrow 0$; $\frac{mgh}{k_B T} \rightarrow \infty$

$$\lim_{T \rightarrow 0} N k_B T \left(\frac{1 - (1+x) e^{-x}}{1 - e^{-x}} \right) = 0 \cdot \left(\frac{1-0}{1-0} \right) = 0 \quad \text{ok!}$$

d) Evaluer la partie de l'énergie potentielle quand $L \rightarrow 0$ et $L \rightarrow \infty$.

$$L \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{mgl}{k_B T} \rightarrow \infty \Rightarrow U_{pot} \rightarrow Nk_B T \left(\frac{1-0}{1-0} \right) = Nk_B T$$

$$L \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{mgl}{k_B T} \rightarrow 0 \quad \text{Puis } x = \frac{mgl}{k_B T}$$

$$\text{Taylor de } e^{-x} \approx 1 - x + \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow Nk_B T \frac{(1 - (1+x)e^{-x})}{(1 - e^{-x})} \approx N \frac{mgl}{k_B T} x \frac{(1-x)}{(1-x)}$$

$$\lim_{\substack{L \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} N mgl \frac{(1-x)}{(1-x)} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0 \quad \text{de!}$$

e) Calculez C_v , et évaluez ses limites en $T \rightarrow 0$ et $T \rightarrow \infty$.

$$C_v = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_{N, V} \quad \text{On a : } dN \text{ micro. micro. } \Rightarrow dU = T dS$$

$$\text{On voit que } \frac{\partial U}{\partial S} = T \Rightarrow C_v = \frac{\partial U}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{\partial U}{\partial T}$$

$$\Rightarrow C_v = \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{3}{2} Nk_B T + Nk_B T \frac{(1 - (1+x)e^{-x})}{(1 - e^{-x})} \right) =$$

$$= \frac{3}{2} Nk_B + Nk_B \left(\dots \right) + Nk_B T \frac{\partial}{\partial T} \left(\dots \right)$$

$$\left(x = \frac{mgl}{k_B T} = \frac{1}{T} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial T} \left(\dots \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(1 - \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} \right) = - \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} \right)$$

$$= \frac{\partial x}{\partial T} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} \right) \quad \text{avec } \frac{\partial x}{\partial T} = \frac{\partial (1/T)}{\partial T} = -\frac{1}{T^2} = -\frac{x}{T}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} \right) = \frac{1}{(1 - e^{-x})^2} \left((x e^{-x})' / (1 - e^{-x}) - (1 - e^{-x})' / (x e^{-x}) \right)$$

$$= \frac{1}{(1 - e^{-x})^2} \left((e^{-x} - x e^{-x}) / (1 - e^{-x}) - (+e^{-x}) / (x e^{-x}) \right)$$

$$= \frac{1}{(1 - e^{-x})^2} \left(e^{-x} - x e^{-x} - e^{-2x} + x e^{-2x} - x e^{-2x} \right) = \frac{e^{-x} (1 - x - e^{-x})}{(1 - e^{-x})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial x}{\partial T} \left(\dots \right) = \frac{-x e^{-x} (1 - x - e^{-x})}{T (1 - e^{-x})^2}$$

$$\Rightarrow C_v = \frac{3}{2} Nk_B + Nk_B \left(\frac{1 - (1+x)e^{-x}}{1 - e^{-x}} \right) + Nk_B x \frac{x e^{-x} (1 - x - e^{-x})}{(1 - e^{-x})^2}$$

$$= \frac{3}{2} Nk_B + Nk_B \frac{(1 - (1+x)e^{-x})(1 - e^{-x})}{(1 - e^{-x})^2} + Nk_B \left(\frac{x e^{-x} (1 - x - e^{-x})}{(1 - e^{-x})^2} \right)$$

$$= \frac{3}{2} Nk_B + Nk_B \left(\frac{1 - 2e^{-x} - x e^{-x} + x e^{-2x} + e^{-2x} + x e^{-2x} - x^2 e^{-2x}}{(1 - e^{-x})^2} \right)$$

$$= Nk_B \left(\frac{3}{2} + \frac{1 - 2e^{-x} + e^{-2x} - x^2 e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \right) = Nk_B \left(\frac{3}{2} + \frac{(1 - e^{-x})^2 - x^2 e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \right)$$

$$\Rightarrow C_v = N k_B \left(\frac{3}{2} + 1 - \frac{x^2 e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \right) = N k_B \left(\frac{5}{2} - \frac{x^2 e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \right) - C_v$$

• En $T \rightarrow 0$: $x \rightarrow \infty$:

$$\rightarrow \lim_{T \rightarrow 0} \left[\frac{5}{2} N k_B - N k_B \left(\frac{x^2 e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \right) \right] = \frac{5}{2} N k_B \quad \text{ok}$$

• en $T \rightarrow \infty$: $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ x \rightarrow 0}} \left(\frac{5}{2} N k_B - N k_B \left(\frac{x^2 e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \right) \right) = \text{ind}$$

$$\text{avec } e^{-x} \sim 1 - x + \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(N k_B \left(\frac{5}{2} - \frac{x^2 (1 - x + \frac{x^2}{2})}{(1 - x + \frac{x^2}{2})^2} \right) \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(N k_B \left(\frac{5}{2} - \frac{x^2 (1 - x + \frac{x^2}{2})}{x^2 (1 - x + \frac{x^2}{2})^2} \right) \right) \\ &= N k_B \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{1} \right) = \frac{3}{2} N k_B \end{aligned}$$

f) Evaluer le profil de pression en fonction de h sous hypothèse que $T = \text{cte}$!
(appel : un gaz parfait : $P = N k_B T / V$)

Soit $N_{h \rightarrow h+dh} = \#$ de molécules dans une tranche de dh .

$$N_{h \rightarrow h+dh} = \int_h^{h+dh} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r dz f(\vec{r}, z) \quad \text{et } f(\vec{r}, z) = A \cdot e^{-U/k_B T}$$

$$\left(A = N \alpha^{3/2} \frac{1}{(1 - e^{-a h})^{-1}}, U = mgh + \frac{m v^2}{2}; a = \frac{m g}{k_B T}; \alpha = \frac{m g}{k_B T} \right)$$

$$\rightarrow \frac{N \alpha^{3/2}}{(1 - e^{-a h})} \int_h^{h+dh} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-a z} d^3r \int_0^\infty v^2 e^{-\frac{m v^2}{2 k_B T}} dv$$

$$= \frac{N \alpha^{3/2}}{(1 - e^{-a h})} \left[\frac{-e^{-a z}}{a} \right]_h^{h+dh} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{2 \pi}{m} \right)^{3/2} = N \left(\frac{e^{-a h}}{1 - e^{-a h}} - \frac{e^{-a(h+dh)}}{1 - e^{-a h}} \right) \frac{1}{(1 - e^{-a h})}$$

$$= \frac{N}{(1 - e^{-a h})} e^{-a h} (1 - e^{-a dh}) \approx \frac{N}{(1 - e^{-a h})} e^{-a h} \left(a dh + \frac{a^2 dh^2}{2} \right)$$

$$\rightarrow N_{h \rightarrow h+dh} \approx \frac{N}{(1 - e^{-a h})} e^{-a h} \cdot a \cdot dh = N \cdot \frac{m g}{k_B T} \cdot dh \cdot \frac{e^{-\frac{m g h}{k_B T}}}{(1 - e^{-\frac{m g h}{k_B T}})}$$

$V_{h \rightarrow h+dh}$ (élément de volume par tranche) = $L^2 dh$

$$\rightarrow P_{h \rightarrow h+dh} = \frac{N_{h \rightarrow h+dh} \cdot k_B T}{V_{h \rightarrow h+dh}} = \frac{N m g}{k_B T} \cdot dh \cdot \frac{e^{-a h}}{(1 - e^{-a h})} \cdot \frac{k_B T}{L^2 dh}$$

$$P_{h \rightarrow h+dh} = \frac{N m g}{L^2} \cdot \frac{e^{-\frac{m g h}{k_B T}}}{(1 - e^{-\frac{m g h}{k_B T}})} \quad \left(\lim_{dh \rightarrow 0} \text{indépendance car indépendante de } dh \right)$$

$$L^3 = V \rightarrow P(h) = \frac{N m g L}{V} \frac{e^{-\frac{m g h}{k_B T}}}{(1 - e^{-\frac{m g h}{k_B T}})}$$

Ex: 3) Montrer pour la distribution de Maxwell-Boltzmann :

a) Evaluer $\frac{\Delta U}{U} \rightarrow \langle (U - \langle U \rangle)^2 \rangle$

variance : $\langle U^2 \rangle - \frac{\langle U \rangle^2}{N}$; $U = \frac{mv^2}{2}$ et $\langle U \rangle = \frac{3}{2} k_B T$

$$(U - \langle U \rangle)^2 = \frac{m^2 v^4}{4} + \frac{9}{4} (k_B T)^2 - \frac{3}{2} m v^2 k_B T$$

$$\Rightarrow \langle (U - \langle U \rangle)^2 \rangle = \int_0^{\infty} 4\pi v^2 (U - \langle U \rangle)^2 f(v) dv$$

$\alpha = \frac{m}{2k_B T}$

$$= 4\pi \int_0^{\infty} \left(\frac{m^2 v^4}{4} + \frac{9}{4} k_B^2 T^2 - \frac{3}{2} m v^2 k_B T \right) v^2 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m v^2}{2k_B T}} dv \cdot N$$

$$= 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \left(\frac{m^2 v^4}{4} - \frac{9}{4} k_B^2 T^2 + \frac{3}{2} m v^2 k_B T \right) v^2 e^{-\alpha v^2} dv \cdot N$$

① $\rightarrow \int_0^{\infty} \frac{m^2}{4} v^6 e^{-\alpha v^2} dv = \frac{m^2}{4} \int_0^{\infty} v^6 e^{-\alpha v^2} dv = \frac{m^2}{4} \cdot \frac{15}{16} \left(\frac{\pi}{\alpha^3} \right)^{1/2}$

② $\rightarrow \int_0^{\infty} \frac{9}{4} k_B^2 T^2 v^2 e^{-\alpha v^2} dv = \frac{9}{4} (k_B T)^2 \int_0^{\infty} v^2 e^{-\alpha v^2} dv = \frac{9}{4} (k_B T)^2 \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$

③ $\rightarrow - \int_0^{\infty} \frac{3}{2} m v^4 k_B T e^{-\alpha v^2} dv = -\frac{3 m k_B T}{2} \int_0^{\infty} v^4 e^{-\alpha v^2} dv = -\frac{3}{2} m k_B T \cdot \frac{3}{8} \left(\frac{\pi}{\alpha^3} \right)^{1/2}$

$$\rightarrow \langle (U - \langle U \rangle)^2 \rangle = 4 \alpha^{3/2} \pi^{1/2} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{m^2 \frac{15}{16} \alpha^{-3/2}}{\alpha} + \frac{9}{4} (k_B T)^2 \alpha^{-3/2} - \frac{9}{4} m k_B T \alpha^{-5/2} \right) \right) \cdot N$$

$$= \alpha^{3/2} \cdot \pi^{1/2} \left(\frac{m^2 \frac{15}{16} \alpha^{-2} + \frac{9}{4} (k_B T)^2 - \frac{9}{4} m k_B T \alpha^{-1}}{\alpha} \right) \cdot N$$

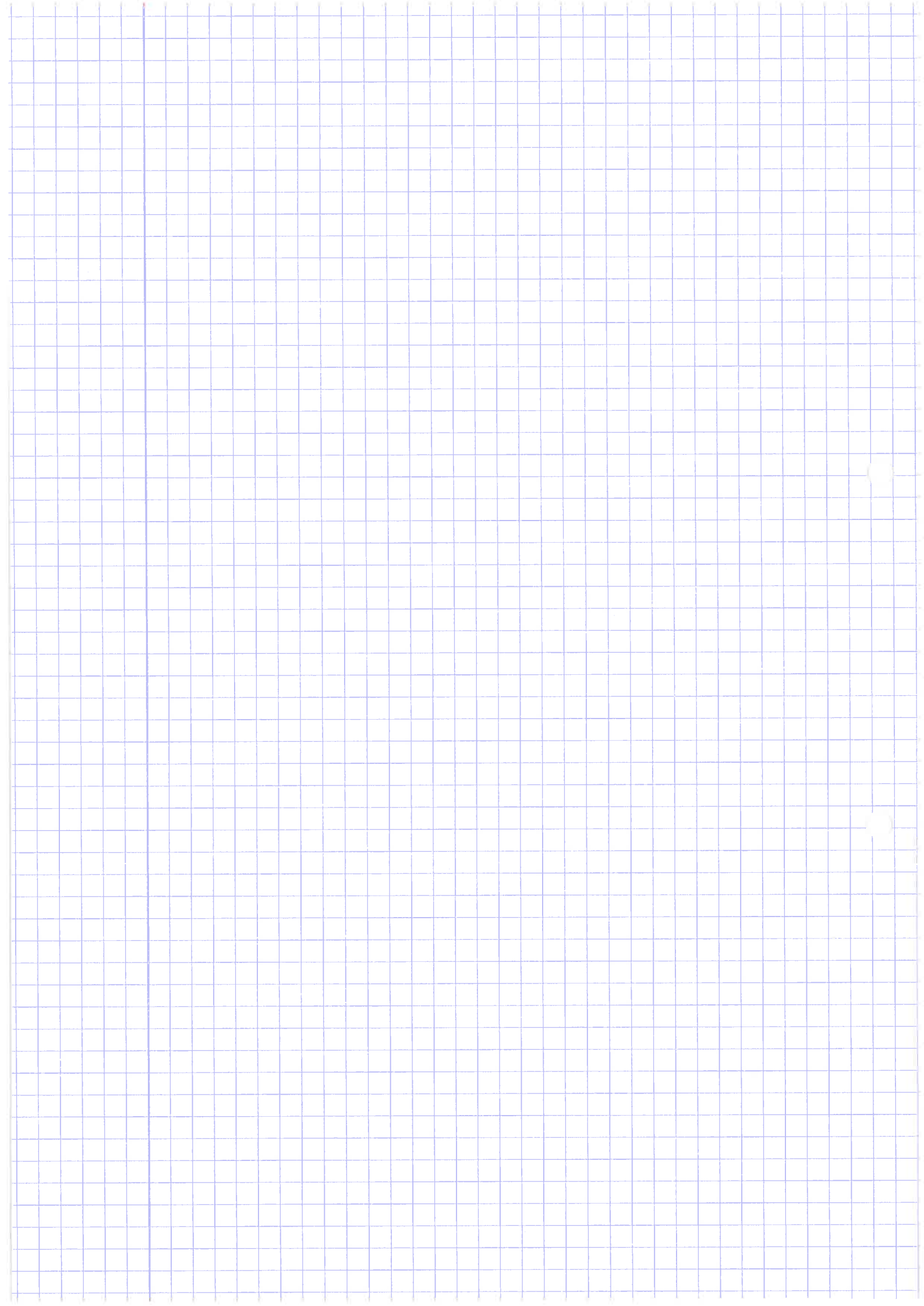
$$= \left(\frac{15}{16} \frac{m^2 k_B^2 T^2}{m^2} + \frac{9}{4} (k_B T)^2 - \frac{9}{4} m k_B T \frac{k_B T}{m} \right) \cdot N$$

$$= (k_B T)^2 \left(\frac{15}{4} + \frac{9}{4} - \frac{9}{2} \right) = \frac{3}{2} (k_B T)^2 N$$

$$\Rightarrow \Delta U = \sqrt{\frac{3}{2} N^2 k_B T^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta U}{U} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2} N k_B T^2}}{\frac{3}{2} N k_B T} = \sqrt{\frac{2}{3N}}$$

③



PHYS-F-201 : 5ème série d'exercices

-
1. La hauteur de la flamme d'un briquet à butane est de 0.5 cm à 10 °C et de 1 cm à 37°C. On suppose que la hauteur de la flamme est proportionnelle à la tension de vapeur dans le briquet. Calculez la chaleur de vaporisation supposée constante dans l'intervalle de température considéré.
-
2. Calculez la température d'ébullition dans une casserole à pression contenant de l'eau, où règne une pression de 1.4 atmosphères. La chaleur de vaporisation de l'eau est 40.6 kJ mol^{-1} .
-
3. On connaît la température d'ébullition de l'eau à une atmosphère : 100 °C. On dispose des mesures suivantes pour la pression de vapeur P : $P = P_1 = 757.299 \text{ mm Hg}$ à $T = T_1 = 99.90 \text{ °C}$; $P = P_2 = 762.720 \text{ mm Hg}$ à $T = T_2 = 100.10 \text{ °C}$. Sachant que la chaleur de vaporisation de l'eau à la température d'ébullition est de 40.6 kJ mol^{-1} , estimez le zéro absolu en assimilant la vapeur d'eau à un gaz parfait.
-
4. L'intensité du rayonnement solaire par temps beau et sec à Los Angeles est de 1.2 kW/m^2 . Sachant que la chaleur d'évaporation de l'eau est de 40.7 kJ/mol , calculez la quantité d'eau s'évaporant par seconde d'une piscine de $5\text{m} \times 10\text{m}$. Quelle est l'épaisseur de la couche d'eau s'évaporant par heure ?
-
5. Une personne essaie de perdre 10 kg de graisse en mangeant des cubes de glace. Combien de cubes de glace de 50g à -20°C cette personne doit-elle manger sachant que
 - * $\Delta_c H(\text{graisse}) = -38 \text{ kJ g}^{-1}$,
 - * $\Delta_f H(\text{glace}) = 333 \text{ J g}^{-1}$
 - * $c_p(\text{glace}) = 2.09 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}$
-
6. Calculez la variation d'entropie de l'eau et de tous les autres corps, lorsqu'une mole d'eau surfondue gèle à -10°C et 1 atm. Considérez que les capacités calorifiques molaires de l'eau et de la glace sont constantes et respectivement égales à 75 et $38 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ et que la chaleur latente de fusion à 0°C est 6026 J mol^{-1} .
-
7. Un matin d'hiver, la température atteint -5°C et la pression partielle de la vapeur d'eau dans l'air tombe à 2 mm Hg. Le givre va-t-il sublimer ? A quelle pression partielle de l'eau la sublimation s'arrêterait-elle ? A son point triple ($T = 273.16 \text{ K}$, $P = 4.58 \text{ mm Hg}$), la chaleur latente de fusion de l'eau vaut 6 kJ mol^{-1} et sa chaleur latente de vaporisation vaut 45 kJ mol^{-1} . L'air ambiant n'influence pas l'équilibre des phases de l'eau.
-

Question posée à l'examen d'août 2013

Un récipient calorifugé à la pression atmosphérique contient une masse m de phosphore surfondue à une température T_i inférieure à la température de fusion T_{fus} . Après avoir agité le récipient, le phosphore liquide se solidifie entièrement. La température finale à l'équilibre est $T_f < T_{fus}$.

- Décrivez la nature de la transformation en justifiant votre réponse.
- Après avoir rappelé la définition de l'enthalpie, montrez que celle-ci reste constante au cours de cette transformation.
- Exprimez la température T_f en fonction de l'enthalpie massique de fusion \mathcal{L}_{fus} , des capacités calorifiques massiques c_p^l du phosphore liquide et c_p^s du phosphore solide. Les coefficients \mathcal{L}_{fus} , c_p^l et c_p^s seront supposés indépendants de la température.
- Calculez la variation d'entropie au cours de cette transformation.

Question posée à l'examen de janvier 2013

Un gaz contenu dans une enceinte fermée est partiellement dissout dans un solvant liquide. Nous admettons que le potentiel chimique du gaz dissout est donné par

$$\mu_{dis}(T, P, X) = \mu_{dis}(T, P, X_0) + k_B T \ln \frac{X}{X_0}$$

où k_B est la constante de Boltzmann, X représente la fraction de gaz dissout et X_0 une fraction de gaz dissout pour une solution de référence.

- Dans quelles conditions les molécules du gaz sont-elles en équilibre avec les molécules dissoutes dans le solvant ?
- Montrez qu'à l'équilibre des phases, une variation infinitésimale dP de la pression à température constante s'accompagne d'une variation dX de la fraction de gaz dissout.
- En supposant que le gaz soit parfait et que les molécules de gaz dissoutes occupent un volume négligeable, montrez que $X = X_0 P / P_0$ où P_0 est la pression à l'équilibre de la solution de référence.

Serie 5: ?

lapel:

Clausius - Clapeyron:

$$P_{\phi}(T) = P_{\phi}(T_0) \exp\left(\frac{-\Delta^{\text{vap}}}{k_B} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right)$$

$\phi = \text{h}_2\text{O}$; Δ^{vap} = chaleur latente.

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}; \quad 1 \text{ atm} = 760 \text{ mm Hg}; \quad k_B \cdot N_{\text{Av}} = R = 8,31 \text{ J/K mol}$$

ex: 1: avec $\frac{h_1}{h_2} = \frac{P_1}{P_2}$ (h_1 à T_0 et h_2 à T)

$$P_{\phi}(T) = P_{\phi}(T_0) \exp\left[\frac{-\Delta^{\text{vap}}}{k_B} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right]; \text{ on cherche } \Delta^{\text{vap}}$$

$$\Rightarrow \Delta^{\text{vap}} = -\ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right) \cdot \frac{k_B}{\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)}$$

$$\text{avec } T = 37^{\circ}\text{C} = 310,15 \text{ K}; \quad T_0 = 10^{\circ}\text{C} = 283,15 \text{ K}$$

$$h_2 = 1 \text{ cm} \quad \text{et} \quad h_1 = 0,5 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \Delta^{\text{vap}} = \frac{-\ln(2) \cdot k_B}{\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)} = -187 \text{ kJ/mol}$$

ex: 2:

$$\Delta^{\text{vap}} = 40,6 \text{ kJ/mol}; \quad (P_0 = 1 \text{ atm}, T_0 = 100^{\circ}\text{C})$$

$$(P = 1,4 \text{ atm}, T = ?)$$

$$\Rightarrow T = \left(-\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) \cdot \frac{k_B}{\Delta^{\text{vap}}} + \frac{1}{T_0}\right)^{-1} = 382,99 \text{ K} = 109,8^{\circ}\text{C}$$

ex: 3: $T_{\text{éb}}$ à 1 atm = 100°C , et $\Delta^{\text{vap}} = 40,6 \text{ kJ/mol}$

$$P_1 = 754,293 \text{ mm Hg} \quad \text{à} \quad T_1 = 99,90^{\circ}\text{C}$$

$$P_2 = 762,76 \text{ mm Hg} \quad \text{à} \quad T_2 = 100,10^{\circ}\text{C}$$

\rightarrow zéro absolu pour un gaz parfait! $(P \overset{T \rightarrow 0}{V} = n (k_B N_{\text{Av}}) T)$

$$\text{pour } \begin{cases} T_1 = T - \Delta T \\ T_2 = T + \Delta T \\ T = T_0 + 100 \end{cases}$$

avec $T_0 = T_{\text{zéro absolu}}$.

(Suite ex 3)

$$\frac{P_1}{P_2} = \exp\left(-\frac{Q_{\text{vap}}}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \exp\left(-\frac{Q_{\text{vap}}}{R} \left(\frac{1}{T-\Delta T} - \frac{1}{T+\Delta T}\right)\right) = \exp\left(-\frac{Q_{\text{vap}}}{R} \left(\frac{2\Delta T}{T^2 - \Delta T^2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{-Q_{\text{vap}}}{R} \frac{1}{\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)} \cdot 2\Delta T \quad \text{or } \Delta T = 0,1$$

$$\Rightarrow T = 370,034 \Rightarrow T_0 = -270,034^\circ \text{C}$$

ex 4

$$1,2 \text{ kW/m}^2 \quad \text{or } I = \frac{P}{S}$$

$$Q_{\text{vap}} = 40,7 \text{ kJ/mol}, \quad S = 50 \text{ m}^2$$

$$\left. \begin{array}{l} P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \\ \Delta Q = N \Delta d \\ N = \frac{m}{M_m} \\ V = \Delta h \cdot S \\ m = \rho V \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta h = \frac{V}{S} = \frac{m}{\rho \cdot S} = \frac{N M_m}{\rho \cdot S} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \frac{M_m}{\rho \cdot S}$$

$$= \frac{P \Delta t}{\Delta d} \frac{M_m}{\rho \cdot S} = \frac{I \Delta t \cdot M_m}{\rho \Delta d}$$

$$\text{or } M_m = 18 \text{ g/mol (H}_2\text{O)}; \quad \Delta d = d_{\text{vap}}$$

$$I = 1,2 \text{ kW/m}^2; \quad \rho = 10^3 \text{ kg/m}^3 \quad \text{or } \Delta t = 1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$$

$$\Rightarrow \Delta h = 1,9 \text{ mm}$$

ex 5

$$\Delta_c H (\text{graine}) = -36 \text{ kJ/g}$$

$$\Delta_f H (\text{glace}) = 333 \text{ J/g}; \quad C_p (\text{glace}) = 2,1 \text{ J/g} \cdot \text{K}$$

$$1000 \text{ kg de graine} : 280000 \text{ kJ (E)}$$

$$m \text{ cubes de glaces de } 50 \text{ g, à } -20^\circ \text{C. (= 253 K)}$$

$$T_{\text{sup}} = 37^\circ \text{C} = 310 \text{ K}$$

$$E = m \cdot 50 (273 - 253) C_p + m \cdot 50 \Delta_f H + m \cdot 50 (310 - 273)$$

$$= m \cdot 2266 \text{ J} \quad \Rightarrow \quad m = 16 \text{ kg}$$

Ex: 6 variation d'entropie de l'eau et de deux autres corps lorsque une molécule d'eau refroidie passe à -10°C à 1 mol

- $C_p(\text{eau}) = 75 \text{ J/K mol}$ et $C_p(\text{glace}) = 38 \text{ J/K mol}$
 et $\Delta_{\text{fus}} = 6026 \text{ J/mol}$ à $0^{\circ}\text{C} = \Delta_e H(0^{\circ}\text{C})$.

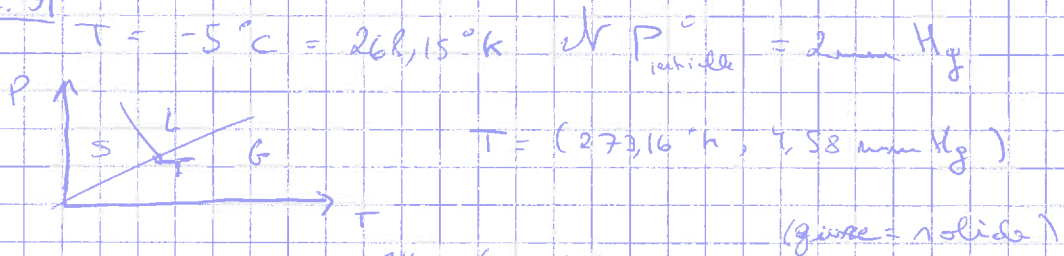
$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$$

$$\Delta Q = C_p(\text{eau})(273-263) - \Delta_{\text{fus}} + C_p(\text{glace})(263-273)$$

$$= 75 \cdot 10 - 6026 - 38 \cdot 10 = -5656$$

$$\Delta S = \frac{-5656}{273} = -20,717 \text{ J/mol K}$$

Ex: 7

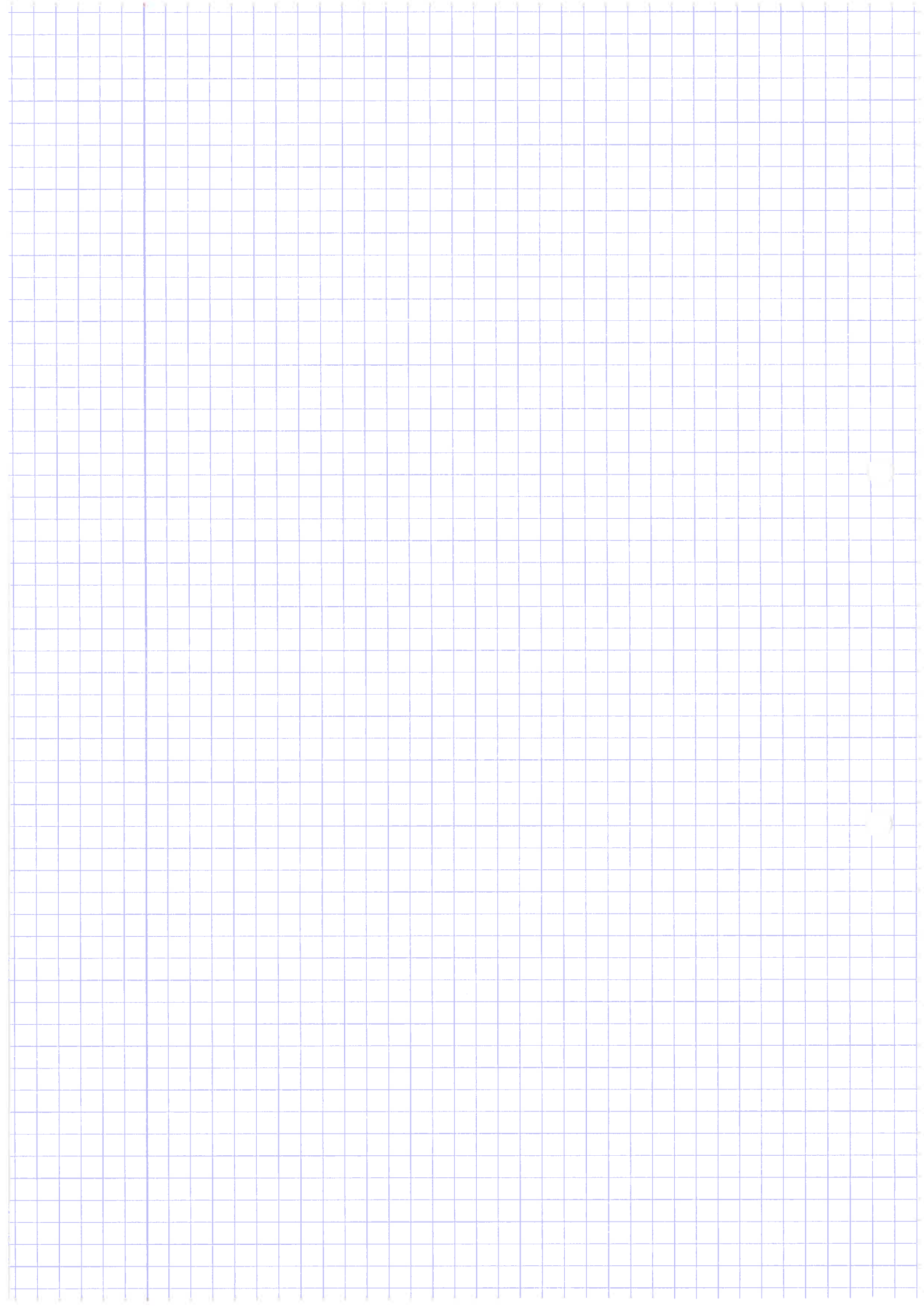


$$P_p(T) = P_p(T_0) e^{-\frac{\Delta_{\text{vap}}}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)}$$

$$\Delta_{\text{sublimation}} = -\Delta_{\text{vap}} + \Delta_{\text{fus}}$$

$$= -45200 + 6000 = 51000 \text{ J/mol}$$

$$\rightarrow P(268 \text{ K}) = P(273) e^{-\frac{51000}{8,314} \left(\frac{1}{268} - \frac{1}{273} \right)} = 2,97 \text{ mm Hg}$$



PHYS-F-201 : 6ème série d'exercices

1. En utilisant les équations de Maxwell dans la matière, démontrez l'identité de Poynting

$$\vec{j}_{\text{libre}} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathcal{H}} \times \vec{E}) - \vec{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

2. Montrez qu'un bloc rectangulaire d'un matériau diélectrique uniformément polarisé (voir figure 1) est équivalent à un condensateur plan dont vous préciserez la charge électrique. Déterminez le champ électrique dans ce condensateur en traitant les armatures comme des plans d'extension infinie.

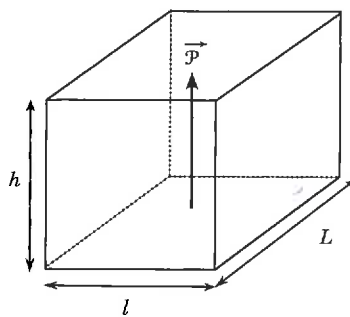


FIGURE 1 – Bloc uniformément polarisé.

3. Montrez qu'un barreau cylindrique uniformément aimanté (l'aimantation étant parallèle à l'axe de symétrie du barreau) est équivalent à un solénoïde dont vous préciserez le courant. Déterminez le champ magnétique le long de l'axe du barreau en considérant un cylindre d'extension infinie.
4. Soit une sphère de rayon R uniformément aimantée (aimantation $\vec{\mathcal{M}}$ dirigée selon l'axe z). Par symétrie, $\vec{A} = A_\phi(r, \theta) \vec{e}_\phi$ en coordonnées sphériques (\vec{e}_ϕ étant un vecteur unitaire azimutal).
- Montrez que A_ϕ est solution de l'équation $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{0}$ et peut s'écrire sous la forme $A_\phi = f(r) \sin \theta$.
 - Montrez que $f(r) = C_1 r^\alpha + C_2 r^\beta$ et déterminez α et β .
 - Déterminez les constantes C_1 et C_2 en appliquant les conditions aux limites et les relations de passage entre les deux milieux.
 - Donnez l'expression des champs \vec{B} et $\vec{\mathcal{H}}$ à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.
5. Montrez à partir des équations de Maxwell et des relations de passage que la variation infinitésimale de l'énergie d'un corps diélectrique soumis au champ électrique produit par des conducteurs chargés est donnée par

$$\delta W_e = \sum_i \Phi_i \delta Q_i,$$

où Φ_i et Q_i représentent respectivement le potentiel électrostatique et la charge électrique du conducteur i . Les conducteurs seront supposés parfaits. La linéarité des équations de Maxwell implique que

les charges sont des fonctions linéaires des potentiels :

$$Q_i = \sum_j C_{ij} \Phi_j$$

où les coefficients de capacité mutuelle C_{ij} sont des quantités caractéristiques du système. En utilisant les relations de Maxwell pour le potentiel

$$\bar{F} = F - \sum_i \Phi_i Q_i,$$

où F désigne l'énergie libre, montrez que $C_{ij} = C_{ji}$. Calculez la capacité d'un condensateur plan lorsque les armatures sont plongées dans un milieu diélectrique de permittivité ϵ .

-
6. Montrez à partir des équations de Maxwell et des relations de passage que la variation infinitésimale de l'énergie d'un corps aimanté soumis à un champ magnétique produit par un ensemble de circuits électriques constitués de fils conducteurs est donnée par

$$\delta W_m = \sum_i I_i \delta \psi_i,$$

où I_i et ψ_i représentent respectivement le courant électrique continu traversant le circuit i et le flux de l'induction magnétique à travers la surface délimitée par le circuit i . Les conducteurs seront supposés parfaits. La linéarité des équations de Maxwell implique que les flux sont des fonctions linéaires des courants :

$$\psi_i = \sum_j L_{ij} I_j$$

où les coefficients L_{ij} caractérisent l'induction mutuelle entre les circuits i et j . En utilisant les relations de Maxwell pour le potentiel

$$\bar{F} = F - \sum_i I_i \Psi_i,$$

où F désigne l'énergie libre, montrez que $L_{ij} = L_{ji}$. Calculez le coefficient d'induction propre d'un solénoïde infini entourant un milieu magnétique de perméabilité μ .

Question posée à l'examen de janvier 2013

Un matériau diélectrique de volume V , est maintenu dans un état d'équilibre thermodynamique à une température T et à une pression P . Plongé dans un champ électrique uniforme E , il acquiert une polarisation électrique \mathcal{P} alignée avec le champ électrique.

- (a) Rappelez l'expression du travail électrique associé à une variation infinitésimale $d\mathcal{P}$ de la polarisation.
(b) En utilisant une relation de Maxwell pour la fonction thermodynamique $\mathcal{G} = G - E\mathcal{P}$ où G est l'énergie libre de Gibbs, montrez que

$$\left(\frac{\partial V}{\partial E}\right)_{T,P} = -\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial P}\right)_{T,E}$$

- (c) Le matériau est supposé homogène et isotrope de sorte que $\mathcal{P} = \epsilon_0 \chi_e E V$, où ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide et χ_e la susceptibilité diélectrique du matériau (supposée indépendante de E). Montrez que lors d'une augmentation isotherme et isobare du champ électrique de 0 à E , la variation du volume du matériau (phénomène d'électrostriction) est approximativement donnée par

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \left(\chi_e \kappa_T - \left(\frac{\partial \chi_e}{\partial P} \right)_T \right)$$

dans la limite $\Delta V/V \ll 1$, κ_T étant le coefficient de compressibilité isotherme (supposé indépendant de E). Nous rappelons que $\log(1+x) \approx x$ dans la limite $x \ll 1$.

Question posée à l'examen de janvier 2012

Certains cristaux dits ferroélectriques développent une polarisation électrique macroscopique même en l'absence de champ électrique en dessous de la température de Curie T_C . Nous supposons que la transition de phase peut être décrite par la théorie de Landau. Nous admettons que l'énergie de Gibbs à pression ambiante et pour des températures T voisines de la transition est donnée par

$$G(\mathcal{P}, T) = G_0(T) + \frac{a}{2}(T - T_C)\mathcal{P}^2 + \frac{b}{4}\mathcal{P}^4$$

où a et b sont des constantes positives, \mathcal{P} est la polarisation et $G_0(T)$ représente l'énergie de Gibbs en l'absence de polarisation.

- (a) Représentez schématiquement $G(\mathcal{P}, T)$ en fonction de \mathcal{P} pour $T > T_C$ et $T < T_C$.
(b) Calculez la polarisation du cristal à l'équilibre thermodynamique en fonction de T .
(c) Exprimez l'entropie du cristal à l'équilibre en fonction de T et montrez que la transition est du deuxième ordre.

ex: 2



on regarde les distributions de charge dans le solide
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \rho \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \rho_{tot} = 0$ car $\vec{P} = \text{cte.}$

sur les surfaces \perp à \vec{P} : $\sigma_{tot} = \vec{P} \cdot \vec{n} \neq 0$

• surface sup: $+\sigma_{tot}$

• surface inf: $-\sigma_{tot}$

charge totale sur la surface sup = $\sigma_{tot} \cdot l \cdot l$

— inf = $-\sigma_{tot} \cdot l \cdot l$

\Rightarrow par analogie avec le condensateur plan: $|\vec{E}| = \frac{\sigma_{tot}}{\epsilon_0}$

ex: 3



$\vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{m} = 0$ car $\vec{m} = \text{cte.}$

surfaces latérales: $\vec{j}_m = \vec{m} \times \vec{m} = 0$

\vec{m} uniforme $\Rightarrow \vec{B}$ uniforme $\Rightarrow |\vec{B}| = \mu_0 |\vec{m}|$

• Solénoïde infini: $B = \mu_0 \frac{NI}{l}$

car $M_{(solénoïde)} = I \pi R^2 \Rightarrow M_{tot} = N I \pi R^2$

$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \frac{M}{\pi R^2 \cdot l} = \mu_0 \frac{M}{V} = \mu_0 \vec{m}$

Ex. 4) sphère de rayon R considérée comme domaine en \mathbb{R}^3 (\vec{P})

$$\vec{A} = A_\varphi(r, \theta) \vec{e}_\varphi = (0, 0, A_\varphi(r, \theta))$$

a) montrer que A est solution de $\nabla \times \nabla \times \vec{A}$, et réécrire avec $A_\varphi = f(r) \sin(\theta)$

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & \vec{u}_\theta & \vec{u}_\varphi \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_\varphi(r, \theta) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial_\theta (r \sin \theta A_\varphi)}{r^2 \sin \theta} & -\frac{\partial_r (r \sin \theta A_\varphi)}{r \sin \theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_\theta & u_r & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & \vec{u}_\theta & \vec{u}_\varphi \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ -u_\theta & u_r & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial_\theta (r u_\theta)}{r^2 \sin \theta} & \frac{\partial_\varphi (u_r)}{r \sin \theta} & \frac{\partial_r (r u_\theta) - \partial_\theta (r u_r)}{r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

① = 0 car A_φ ne dépend pas de φ .

② = 0 car A_φ ne dépend pas de φ .

$$\textcircled{3} \cdot u_r = \frac{\partial_\theta (r \sin \theta A_\varphi)}{r^2 \sin \theta} = \frac{\cos(\theta) A_\varphi}{r} + \frac{\partial_\theta A_\varphi}{r}$$

$$u_\theta = -\frac{\partial_r (r \sin \theta A_\varphi)}{r \sin \theta} = -\frac{A_\varphi}{r} - \partial_r A_\varphi$$

$$\frac{1}{r} \partial_r (r u_\theta) = \frac{u_\theta}{r} + \partial_r u_\theta = -\frac{A_\varphi}{r^2} - \frac{\partial_r A_\varphi}{r} + \frac{A_\varphi}{r^2} - \frac{\partial_r A_\varphi}{r} - \partial_r^2 A_\varphi$$

$$\frac{1}{r} \partial_\theta (r u_r) = \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 A_\varphi + \frac{\cos(\theta)}{r^2} \partial_\theta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta}$$

$$\Rightarrow \text{car } \nabla \times \nabla \times \vec{A} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial_\theta^2 A_\varphi}{r^2} - \frac{\cos(\theta)}{r^2} \partial_\theta A_\varphi + \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} - \partial_r^2 A_\varphi - \frac{2 \partial_r A_\varphi}{r} = 0$$

$$\text{Si } A = f(r) \sin \theta$$

$$\left(\rightarrow \partial_\theta A = f(r) \cos \theta, \partial_\theta^2 A = -f(r) \sin \theta \right)$$

$$\rightarrow \left(-\partial_r A = f'(r) \sin \theta, \partial_r^2 A = f''(r) \sin \theta \right)$$

$$\Rightarrow \frac{f(r)}{r^2} \sin \theta - \frac{\cos^2 \theta f(r)}{r^2} + \frac{f(r)}{r^2 \sin \theta} - f''(r) \sin \theta - \frac{2 f'(r)}{r} \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow f(r) \left(\sin \theta - \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \right) - r^2 f''(r) \sin \theta - 2r f'(r) \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow f(r) \left(\sin \theta + \frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta} \right) - \sin \theta (r^2 f''(r) + 2r f'(r)) = 0$$

$$\Rightarrow \sin \theta (2f(r) - 2r f'(r) - r^2 f''(r)) = 0 \quad (*)$$

$$\Rightarrow \boxed{r^2 f''(r) + 2r f'(r) - 2f(r) = 0}$$

(ex4) b) Montrer que $f(r) = C_1 r^\alpha + C_2 r^\beta$, et trouver α et β .

→ pour $f(r) = r^m$

$$\Rightarrow r^2 m(m-1) r^{m-2} + 2r m r^{m-1} - 2r^m = 0$$

$$\Rightarrow r^m (m^2 + m - 2) = 0$$

$$\hookrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{cases} 2 = \beta \\ 1 = \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(r) = C_1 r + C_2 r^{-2}$$

c) déterminer C_1 et C_2 avec les conditions limites et les relations de saut entre 2 milieux:

relation de saut :

conditions limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{i,r} = B_{e,r} \\ H_{i,\theta} = H_{e,\theta} \end{array} \right\} \begin{array}{l} i = \text{int} (r \in R) \\ e = \text{ext} (r \in R) \\ \text{en } r=R \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} r \rightarrow \infty \Rightarrow A \rightarrow 0 \\ r \rightarrow 0 \text{ avec } A \neq \infty \end{array} \right.$$

$$A_{\theta} = f(r) \sin \theta = (C_1 r + C_2 r^{-2}) \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{A_{\theta} \sin \theta}{r \sin \theta} \right) \vec{u}_r - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{A_{\theta}}{r} \right) \vec{u}_{\theta} \\ &= \left(\frac{\cos \theta}{r \sin \theta} A_{\theta} + \sin \theta \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) \vec{u}_r - \left(\frac{A_{\theta}}{r} - f(r) \sin \theta \right) \vec{u}_{\theta} \\ &= \frac{2 \cos \theta}{r} (C_1 r + C_2 r^{-2}) \vec{u}_r - \left(\frac{C_1 - 2 C_2 r^{-3}}{r} \sin \theta \right) \vec{u}_{\theta} \\ &= 2 \cos \theta (C_1 + C_2 r^{-3}) \vec{u}_r - \sin \theta (C_1 - C_2 r^{-3}) \vec{u}_{\theta} \end{aligned}$$

$A \rightarrow 0$ en $r \rightarrow \infty$: A_{ext}

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (C_{1,\text{ext}} r + C_{2,\text{ext}} r^{-2}) \sin \theta = 0 \Leftrightarrow C_{1,\text{ext}} = 0$$

$A \neq \infty$ en $r \rightarrow 0$: A_{int}

$$\lim_{r \rightarrow 0} (C_{1,\text{int}} r + C_{2,\text{int}} r^{-2}) \neq \infty \Leftrightarrow C_{2,\text{int}} = 0$$

$$\bullet B_{i,r} = B_{e,r}$$

$$\Rightarrow 2 \cos \theta C_{1,\text{int}} = 2 \cos \theta C_{2,\text{ext}} r^{-3} \Rightarrow \boxed{C_{1,\text{int}} = C_{2,\text{ext}} r^{-3}}$$

$$\bullet H_{i,\theta} = H_{e,\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{m} \quad \text{où } \vec{m} = \begin{cases} m \vec{u}_z & \text{dans la sphere} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{H}_{\theta} = \frac{\vec{B}_{\theta}}{\mu_0} - \vec{m}_{\theta} \quad \text{où } \vec{m}_{\theta} = -m \sin(\theta)$$

↳

$$H_{1,0} = \frac{B_{1,0}}{\mu_0} - m_{\theta,1} = \frac{-2 \sin(\theta) C_{1,i}}{\mu_0} - m \sin \theta$$

$$= \sin \theta \left(m - \frac{2}{\mu_0} C_{1,i} \right)$$

$$H_{2,0} = \frac{B_{2,0}}{\mu_0} - m_{\theta,2} = \frac{\sin(\theta) C_{2,e}}{r^3} - \frac{0}{m=0 \text{ en air}}$$

$$\Rightarrow \sin \theta \left(\frac{-2}{\mu_0} C_{1,i} + m \right) = \sin(\theta) \left(\frac{C_{2,e}}{r^3} \right)$$

$$\Rightarrow \text{comme } C_{1,i} = C_{2,e} r^{-3}$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{\mu_0} C_{2,e} + m = \frac{C_{2,e}}{r^3} \Leftrightarrow C_{2,e} = \frac{m \mu_0 R^3}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{\mu_0} C_{1,i} + m = C_{1,i} \Leftrightarrow C_{1,i} = \frac{m \mu_0}{3}$$

$$\text{or } C_{1,e} = 0 = C_{2,i}$$

$$\Rightarrow A_y = \left(\frac{m \mu_0 r}{3} + \frac{m \mu_0 R^3}{3 r^2} \right) \sin \theta$$

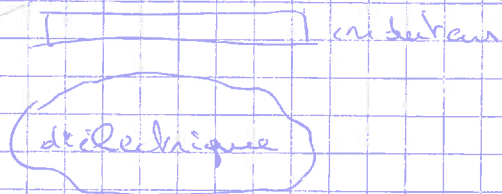
d) donner l'expression de \vec{B} et \vec{H} à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère :

$$\Rightarrow \vec{B} = \begin{cases} \left(\frac{2}{3} \cos \theta (m \mu_0), -\frac{2 \mu_0 m \sin \theta}{3}, 0 \right) & r: r < R \\ \left(\frac{2}{3} \cos \theta \left(\frac{\mu_0 m R^3}{r^2} \right), \frac{2 \mu_0 m R^3 \sin \theta}{3 r^2}, 0 \right) & r: r > R \end{cases}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{m} \quad \text{avec } \vec{m} = (m \cos \theta, -m \sin \theta, 0)$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \begin{cases} \left(-\frac{1}{3} m \cos \theta, \frac{1}{3} m \sin \theta, 0 \right) & r: r < R \\ \left(\frac{2}{3} \cos \theta \frac{m R^3}{r^2}, \frac{2}{3} \sin \theta \frac{m R^3}{r^2}, 0 \right) & r: r > R \end{cases}$$

5) (P1)
 Σ_{∞}



$\vec{E} = 0$ dans les conducteurs

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \text{ ailleurs.}$$

\tilde{V} = valeur extérieur au conducteur.

$$SW_e = \int_V \vec{E} \cdot d\vec{D} \, dV = - \int_V (\vec{\nabla} \phi) \cdot d\vec{D} \, dV$$

$$= - \int_V \left[\underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\phi \, d\vec{D})}_{\text{libre} = 0} - \phi \underbrace{\vec{\nabla} \cdot d\vec{D}}_{\text{charges}} \right] dV$$

$$= - \int_V \vec{\nabla} \cdot (\phi \, d\vec{D}) \, dV \stackrel{\text{surface}}{=} - \int_{\Sigma} \phi \, d\vec{D} \cdot d\vec{\Sigma}$$

surfaces : surface générale minus surface conducteur = \tilde{V}

$$\Rightarrow 0 = - \int_{\Sigma_{\text{ext}}} \phi \, d\vec{D} \cdot d\vec{\Sigma} - \int_{\Sigma_{\text{int}}} \phi \, d\vec{D} \cdot d\vec{\Sigma}$$

relation de passage (6.21)

$$\frac{2}{1} \begin{matrix} \vec{m} \\ \uparrow \\ \text{conducteur} \\ \vec{D} \text{ (conducteur)} \end{matrix} \quad \vec{D}_2 - \vec{D}_1 \cdot \vec{m} = \sigma_{\text{charge}}$$

Ici :

$$\begin{cases} \vec{D}_2 = \epsilon_0 \vec{E}_2 + \vec{P}_2 = \vec{0} \\ \vec{D}_1 = \vec{D} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\vec{D} \cdot \vec{m} = \sigma_{\text{charge}}$$

$$\Rightarrow SW_e = + \int_{\Sigma} \phi \, d\sigma_{\text{charge}} \, d\Sigma + 0$$

$\vec{E} = \vec{0}$ dans les conducteurs $\Rightarrow \phi = \text{cte}$.

$$\Rightarrow SW_e = \sum_i \phi_i \int_{\Sigma_i} d\sigma_{\text{charge}} \, d\Sigma = \sum_i \phi_i \, q_i$$

(P2)

$$Q_i = \sum_j \epsilon_{ij} \phi_j, \quad \vec{F} = F - \sum_i \phi_i \, Q_i$$

$$\Rightarrow d\vec{F} = dF - \sum_i d\phi_i \, Q_i - \sum_i \phi_i \, dQ_i$$

$$F = U - TS \quad dU = \delta Q + \delta W = T \, dS + dW_e = T \, dS + \sum_i \phi_i \, dQ_i$$

$$dF = dU - T \, dS - S \, dT$$

$$= -S \, dT + \sum_i \phi_i \, dQ_i$$

$$\Rightarrow d\vec{F} = -S \, dT - \sum_i Q_i \, d\phi_i$$

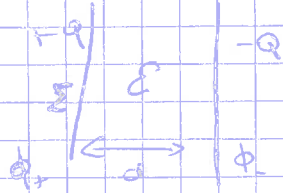
$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{F}}{\partial \phi_i} = Q_i$$

relation de Maxwell :

$$\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial \phi_i \partial \phi_j} = \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial \phi_j \partial \phi_i}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial Q_i}{\partial \phi_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial \phi_i} \quad \Leftrightarrow C_{ij} = C_{ji}$$

Part 3 :



$$D = \epsilon E = \sigma_{\text{ext}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q/\Sigma}{\epsilon} = \frac{\phi_+ - \phi_-}{d}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\epsilon}{d/\Sigma} (\phi_+ - \phi_-) \equiv C (\phi_+ - \phi_-)$$

$$\Rightarrow C = \frac{\epsilon \Sigma}{d}$$

PHYS-F-201 : 7ème série d'exercices

-
1. Calculez les capacités calorifiques et les coefficients thermomécaniques d'un gaz de photons.
 2. Démontrez la loi de déplacement de Wien à partir de la formule de Planck de la densité d'énergie d'un corps noir. Remarque : la solution de l'équation $5(e^x - 1) = xe^x$ est approximativement égale à $x = 4,965$.
 3. Montrez que l'énergie et l'entropie émises par un corps noir par unité de temps et de surface sont données par

$$\frac{dU}{dt d\Sigma} = \frac{sc}{4} T^4,$$

$$\frac{dS}{dt d\Sigma} = \frac{sc}{3} T^3.$$

En première approximation, la Terre et le Soleil peuvent être assimilés à des corps noirs. Montrez par un bilan énergétique que la température à la surface de la Terre est environ vingt fois plus basse que la température à la surface du Soleil. Montrez que la Terre émet vingt fois plus d'entropie qu'elle n'en reçoit du Soleil. Commentez. Indication : la distance Terre-Soleil est d'environ 150 millions de km, le rayon du Soleil 700 000 km.

-
4. On considère une paroi homogène d'épaisseur d , d'aire Σ et de conductivité thermique λ . Les deux faces sont maintenues à des températures différentes, notées T_1 et T_2 . Montrez qu'en régime stationnaire et en négligeant les effets de bord, le courant de chaleur peut s'écrire sous la forme

$$I_Q = \frac{\delta Q}{dt} = \frac{T_1 - T_2}{\mathcal{R}}$$

et donnez l'expression de la résistance thermique \mathcal{R} . Calculez la quantité de chaleur traversant chaque seconde une fenêtre rectangulaire en verre de 1 mètre de large, 2 mètre de long et d'épaisseur 2 centimètres lorsque $T_1 = 0^\circ\text{C}$ et $T_2 = 20^\circ\text{C}$. Même question pour une fenêtre de mêmes dimensions avec double vitrage dont l'épaisseur des vitres internes et externes est de 0,4 centimètres. La conductivité thermique de l'air est $0,023 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, celle du verre $0,8 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

-
5. On considère un barreau de diffusivité thermique κ en équilibre thermique à la température T_0 . A l'instant $t = 0$, une des extrémités du barreau est chauffée à la température T_1 . Calculez l'évolution de la température du barreau au cours du temps en supposant que la chaleur ne se propage que le long de l'axe du barreau. Vous montrerez tout d'abord que l'équation de la chaleur peut s'exprimer sous la forme

$$\frac{d^2 T}{du^2} + 2u \frac{dT}{du} = 0, \quad u = \frac{x}{\sqrt{4\kappa t}},$$

x mesurant la position d'un point le long de l'axe du barreau.

Question posée à l'examen de janvier 2012

L'Univers est rempli d'un rayonnement thermique fossile, preuve que dans le passé l'Univers s'est trouvé dans un état extrêmement dense et chaud. L'Univers sera assimilé à un corps noir de volume V et de température T .

- (a) Rappelez la définition d'un corps noir.
- (b) Expliquez pourquoi l'entropie S d'un corps noir ne peut s'écrire que sous la forme $S = s(T)V$.
- (c) Déterminez la fonction $s(T)$ en invoquant la définition thermodynamique de la température. Nous rappelons que l'énergie d'un corps noir est donnée par $U = bT^4V$ où b est la constante de Stefan.
- (d) Exprimez la température T du rayonnement fossile en fonction de V en considérant que l'expansion de l'Univers s'est produite de manière adiabatique à partir d'un état initial caractérisé par une température T_0 et un volume V_0 .

Série 7

Rappel :

• loi de Stefan : $U = \sigma V T^4$

• gaz de photon : $P = \frac{U}{3V} = \frac{\sigma T^4}{3}$ et $S = \frac{4}{3} \sigma T^3 V$

• Planck (cup main) : $U(\nu) = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp(\frac{h\nu}{k_B T}) - 1}$ ($\lambda = \frac{c}{\nu}$)

• Wien $\lambda_{\max} (\text{nm}) = 0,29 / T (\text{K})$

• eq de chaleur : $d_t T + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \kappa \nabla^2 T + \sigma \nu$ ($\kappa = \frac{\lambda}{\rho c_V}$)

EX : 1

• $C_V = \frac{\partial U}{\partial T}_V = d_T (\sigma V T^4) = 4 \sigma V T^3$

• $\kappa_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S$

$$\begin{aligned} P = \frac{\sigma T^4}{3} &\Rightarrow T = \left(\frac{3P}{\sigma} \right)^{1/4} \quad \text{et} \quad S = \frac{4}{3} \sigma T^3 V \Rightarrow V = \frac{3S}{4\sigma T^3} \\ \Rightarrow V = \frac{3S}{4\sigma} \left(\frac{\sigma}{3P} \right)^{3/4} &\Rightarrow \frac{-1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{9}{16} \frac{S}{\sigma V} \left(\frac{\sigma}{3P} \right)^{3/4} \frac{1}{P} \\ = \frac{9}{16} \left(\frac{4}{3} \frac{\sigma T^3 V}{3} \right) \frac{1}{\sigma V} \left(\frac{\sigma}{3P} \right)^{3/4} &= \frac{3}{4} \frac{T^3}{P T^3} = \left[\frac{3}{4P} = \kappa_S \right] \end{aligned}$$

(on peut aussi voir ça comme $T^3 = \left(\frac{3P}{\sigma} \right)^{3/4}$)

d'après cela, C_p , α et κ_T ne sont pas défini car S ne dépend pas de P

Si on remarque :

• $C_p = T \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P = 4 \sigma T^3 V$

• $\alpha = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{3S}{4\sigma V} \cdot \left(\frac{-3}{T^4} \right) = \left(\frac{-3}{T^4} \right) \cdot \frac{3}{4\sigma V} \left(\frac{4}{3} \sigma T^3 V \right) = \frac{-3}{T}$

Ex: 2 | : dériver la loi de Wien défini Planck :

$$U = \int d\nu u(\nu) \quad \text{et} \quad u(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{c}{\nu}$$

$$\Rightarrow \int d\nu u(\nu) = \int d\lambda u(\lambda)$$

\Rightarrow Wien $\Rightarrow \lambda_{\text{max}} \rightarrow$ max de $u(\lambda)$.

$$\int d\nu u(\nu) \rightarrow \text{avec } \lambda = \frac{c}{\nu} \rightarrow d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu = -\frac{\lambda^2}{c} d\nu$$

$$\Rightarrow \int d\nu \frac{8\pi\nu^2}{c} \cdot \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} = \int -\frac{8\pi}{\lambda^3} \cdot \frac{hc}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} \cdot \frac{c}{\lambda^2} d\lambda$$

$$\Rightarrow u(\lambda) = -\frac{8\pi}{\lambda^5} \cdot \frac{hc}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}$$

$$\lambda_{\text{max}} : 0 = \frac{d u(\lambda)}{d\lambda} = \dots$$

$$\dots = \frac{5 \cdot 8\pi}{\lambda^6} \cdot \frac{hc}{(e^{x} - 1)} - \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{+1}{(e^{x} - 1)^2} \cdot \frac{+hc}{\lambda^2 k_B T} e^{(-x)}$$

$$= \frac{8\pi hc}{\lambda^6} \left(\frac{5}{(e^{x} - 1)} - \frac{hc}{\lambda k_B T} \cdot \frac{e^{(-x)}}{(e^{x} - 1)^2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5(e^{x} - 1) = \frac{hc}{\lambda k_B T} e^{x}$$

$$\Leftrightarrow 5(e^x - 1) = x e^x \quad \Leftrightarrow x e^x - 5e^x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \sim x = 4,965$$

$$\Rightarrow \frac{hc}{k_B T \lambda_{\text{max}}} = 4,965$$

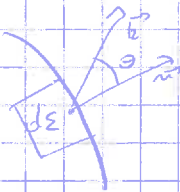
$$\Leftrightarrow \lambda_{\text{max}} = \frac{hc}{k_B T} \cdot \frac{1}{4,965}$$

$$\sim \frac{0,29}{T(\text{K})}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h = 6,626 \cdot 10^{-34} \\ c = 2,99 \cdot 10^8 \\ k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \end{array} \right.$$

ex: 31

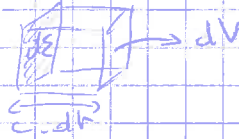
Soit dU un élément d'énergie dans la direction \vec{k}



emis par la surface dS :

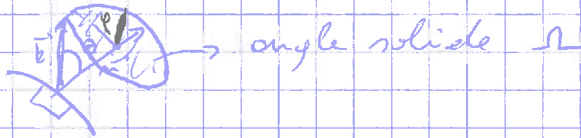
$$\text{On a } dU = U \cdot \frac{dV}{V} \cos(\theta)$$

$$dV = dS \cdot c \cdot dt$$



$$\Rightarrow dU_{(\vec{k})} = U \cdot \frac{dS \cdot c \cdot dt}{V} \cos \theta$$

• Nos radiations sont émis de manière isotrope (= dans toutes les directions). On regarde donc l'angle solide balayé par nos émissions.



angle solide : $\sin \theta \, d\theta \, d\varphi$ (= $d\Omega$)

\Rightarrow sur $\theta \in [0, \pi/2]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin(2\theta) \, d\theta = \pi \left[-\cos \frac{2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} = \pi \cdot \frac{2}{2} = \pi$$

$$\Rightarrow dU = U \cdot \frac{dS \cdot c \cdot dt}{V} \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} = U \cdot \frac{dS \cdot c \cdot dt}{V} \cdot \frac{\pi}{4\pi}$$

↳ élément de l'angle solide $\frac{1}{4}$, ou $\frac{1}{4\pi}$ (4π représente le ratio de la surface de la sphère d'émission)

$$= \frac{dU}{dS \cdot dt} = U \cdot \frac{c}{4V} \quad \text{or } U = \sigma \cdot T^4$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dU}{dS \cdot dt} = \frac{c \sigma T^4}{4}}$$

de même : $\frac{dS}{dS \cdot dt} = S \cdot \frac{c}{4V}$ avec $S = \frac{4}{3} \sigma T^3 V$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dS}{dS \cdot dt} = \frac{c \sigma T^3}{3}}$$

↳

• énergie émise par ν ($dE_{(\nu)} = 4\pi R_{(\nu)}^2$)

- la Terre $dU_{(T)} = \frac{c\sigma T_{(T)}^4}{4} \cdot dS_{(T)} = c\sigma\pi T_{(T)}^4 R_T^2$

- le soleil $dU_{(S)} = c\sigma\pi T_{(S)}^4 R_{(S)}^2$

et soit d la distance Terre - Soleil ($1,5 \cdot 10^8$ km)

$$\frac{dU_{(T)}^{\text{reçu}}}{dt} = \frac{dU_{(S)}^{\text{émise}}}{dt} \cdot \frac{S_{(T)}}{S_{(S)}} = \frac{dU_{(S)}^{\text{émise}}}{dt} \cdot \frac{\pi R_T^2}{4\pi d^2}$$

$$\textcircled{*} \Rightarrow \cancel{c\sigma\pi} T_{(T)}^4 R_T^2 = \cancel{c\sigma\pi} T_{(S)}^4 R_{(S)}^2 \cdot \frac{R_T^2}{4d^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T_{(T)}}{T_{(S)}}\right)^4 = \left(\frac{R_{(S)}}{2d}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{T_{(T)}}{T_{(S)}} = \sqrt{\frac{R_{(S)}}{2d}} \approx \frac{1}{20,7}$$

→ la température de surface de Terre est $\approx 20,7$ fois inférieure à celle du Soleil

$\textcircled{*}$ On suppose que le système de la Terre est à l'équilibre et que $\frac{dU_{(T)}^{\text{émis}}}{dt} = \frac{dU_{(T)}^{\text{reçu}}}{dt}$, ce qui n'est pas une mauvaise approximation (surtout sur de longues périodes).

avec $d = 1,5 \cdot 10^8$ km, $R_{(S)} = 7 \cdot 10^5$ km et $T_{(S)} \approx 5777$ K.

$$\Rightarrow T_{(T)} \approx 279,1 \text{ K}$$

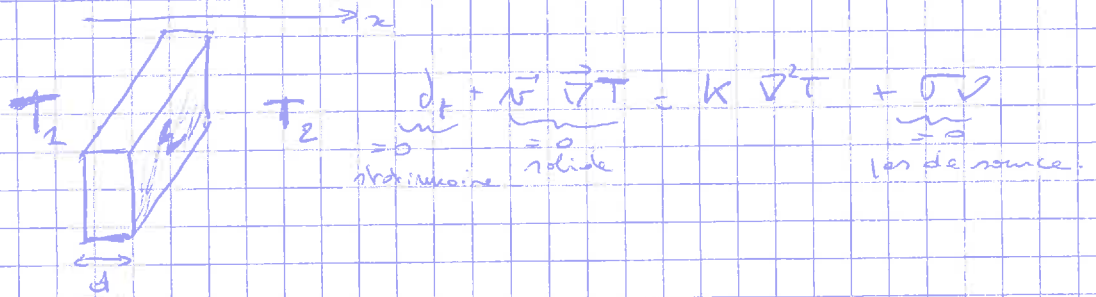
par temps clair, plutôt exact.

Rappel :

• Loi de Fourier : $\vec{J} = -\lambda \vec{\nabla} T$

• courant de chaleur : $I_q = \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{\Sigma}$

Ex: 7



$\Rightarrow \nabla^2 T = 0$, par symétrie, dépend que de "x"

$\rightarrow T''(x) = 0 \Rightarrow T(x) = A + Bx$

• condition : $T(0) = T_1 \Rightarrow A = T_1$

$T(d) = T_2 \Rightarrow T_2 = T_1 + dB \Rightarrow B = \frac{T_2 - T_1}{d}$

$\Rightarrow T(x) = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)x}{d}$

• avec $\vec{J} = -\lambda \vec{\nabla} T \Rightarrow J_x = -\lambda T'(x) = \lambda \frac{(T_1 - T_2)}{d}$

$\Rightarrow I_q = \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{\Sigma} J_x \cdot \vec{u}_x \cdot d\Sigma \cdot \vec{u}_x$
 $= J_x \int_{\Sigma} 1 \cdot d\Sigma \Rightarrow I_q = \lambda \frac{(T_1 - T_2)}{d} \cdot \Sigma$

avec $R = \frac{d}{\Sigma \lambda} \Rightarrow I_q = \frac{(T_1 - T_2)}{R}$

• Pain $d = 0,02 \text{ m}$ et $\Sigma = 1 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 2 \text{ m}^2$, $T_1 = 0^\circ \text{C}$ et $T_2 = 20^\circ \text{C}$

et $\lambda = 0,8 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$; $\Rightarrow I_q = \frac{2 \cdot 0,8}{2 \cdot 0,02} (0 - 20) = -80 \cdot 20 = -1600 \text{ W/K}$

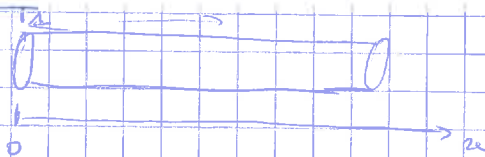
• double vitrage : T_1 $\downarrow 0,02 \text{ m}$ $\uparrow 0,004 \text{ m}$ $\uparrow 0,012 \text{ m}$

$R = R_1 + R_2 + R_3 = 0,2658$

$R_1 = R_3 = \frac{0,004}{0,8 \cdot 2} = 0,0025$ $R_2 = \frac{0,012}{0,023 \cdot 2} = 0,2609$

$I_q = \frac{(T_1 - T_4)}{R} = \frac{1}{R} (R_1 I_{12} + R_2 I_{23} + R_3 I_{34}) = -75,22 \text{ W/K}$

Ex: 5)



diffusion de la chaleur
 T_1 dans un biseau à T_0

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{\nabla} T}_{=0 \text{ (solide)}} = k \nabla^2 T + \underbrace{\sigma \cdot \vec{v}}_{=0 \text{ (pas de source)}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\text{on s'agit en } x)$$

→ changement de variable: $u = \frac{x}{\sqrt{4 \cdot k \cdot t}}$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial u} \cdot \frac{x}{\sqrt{4 \cdot k \cdot t}} \cdot \frac{-1}{2} = \frac{\partial T}{\partial u} \cdot u \cdot \left(\frac{-1}{2t}\right)$$

$$\cdot \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial u} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 \cdot k \cdot t}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot k \cdot t}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} \cdot u \cdot \left(\frac{-1}{2t}\right) = k \cdot \frac{1}{4 \cdot k \cdot t} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial u^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T''(u) + 2u T'(u) = 0}$$

$$\Rightarrow \frac{dT'(u)}{du} = -2u T'(u) \quad \Rightarrow \quad \frac{dT'(u)}{T'(u)} = -2u \, du$$

par intégration: $\ln(T'(u)) = -u^2 + B$

$$\Rightarrow T'(u) = A e^{-u^2} \quad (A = e^B \text{ constante})$$

$$\Rightarrow T(u) - T(0) = A \int_0^u e^{-v^2} \, dv$$

• condition au bord :

$$T(0) = T_1$$

$$T(\infty) = T_0$$

$$\Rightarrow T_0 - T_1 = A \int_0^{+\infty} e^{-v^2} \, dv = A \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Rightarrow A = (T_0 - T_1) \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

$$\Rightarrow T(u) = \left((T_0 - T_1) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-v^2} \, dv \right) + T_1$$

$$\left[\text{N.B.: } \int_0^b e^{-v^2} \, dv = \operatorname{erf}(b) \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \rightarrow \text{fonction d'erreur} \right]$$

Théorème - Janvier 2016

Q1) Écoulement d'un fluide :

On considère un fluide qui s'écoule dans un tube (c) de manière continue et stationnaire.

$$\left(P_i, T_i, V_i \right) \longrightarrow \left(P_f, T_f, V_f \right)$$

Considérons la transformation manométrique : $V_i \rightarrow V=0$ et $V=0 \rightarrow V_f$

1 (a) "Définir l'enthalpie" :

$$H = U + PV$$

1 (b) "Calculer le travail des forces de pression échangées avec le fluide" :

de manière générale : $W = -P \int dV$

$$\Rightarrow W_i = -P_i \int_{V_i}^0 dV = P_i(V_i - 0) = P_i V_i$$

$$W_f = -P_f \int_0^{V_f} dV = P_f(0 - V_f) = -P_f V_f$$

$$\Rightarrow W = W_i + W_f = P_i V_i - P_f V_f$$

1 (c) "Montrer que $\Delta H = H_f - H_i = Q + W_{\text{ext}}$ (travail sur force de pression) :

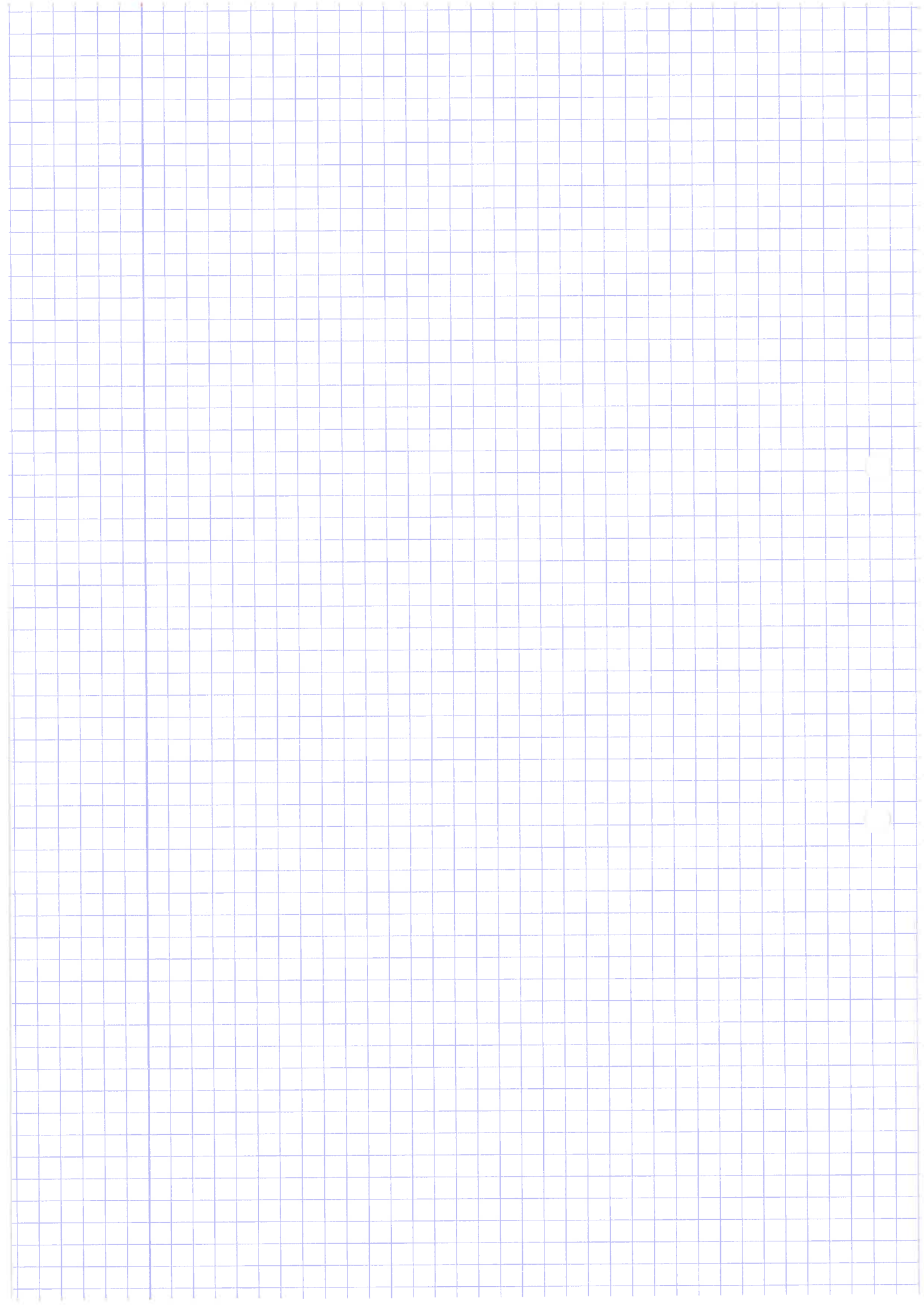
$$\Delta U = U_f - U_i = Q + W_{\text{tot}} = Q + W_{\text{ext}} + W_{\text{pression}}$$

$$\text{et } H = U + PV \Rightarrow U = H - PV$$

$$\Rightarrow \text{donc : } U_f = H_f - P_f V_f \quad \text{et} \quad U_i = H_i - P_i V_i$$

$$\Rightarrow \Delta U = H_f - H_i + \underbrace{P_i V_i - P_f V_f}_{= W_{\text{pression}}} = Q + W_{\text{ext}} + W_{\text{pression}}$$

$$\Rightarrow \Delta U = H_f - H_i = Q + W_{\text{ext}} \quad !$$



Q2) Refrigeration

- Cycle: A → B: (compression) avec Welec: compression adiabatique ($T_B > T_A$)
- B → C: (condenseur): gaz → liquide, monobare, $V \downarrow$, $T_C < T_B$, et $W = 0$
- C → D: (détendeur): $T \downarrow$, adiabatique (peut-être yoyeux), et $W = 0$
- D → A: (évaporateur): liquide → gaz, monobare et: $T_D = T_A$, et $W = 0$
- Chaleur latente molaire (l_m) de et de en C et D.
- Indice adiabatique $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, où C_p et C_v sont les capacités calorifiques molaires

a) " Dans quel cas les performances int-elles optimales? "

→ Dans le cas d'une transformation réversible.

b) Faire le bilan d'enthalpie entre A et B et montrer que

$$W = m \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \frac{R}{M} (T_B - T_A) = m C_p (T_B - T_A) "$$

= A → B est adiabatique: $\Rightarrow dH = VdP$ et $\Delta H = H_B - H_A = W_{elec}!$

avec loi de Poise: $PV^\gamma = \text{cte} \Rightarrow V = \left(\frac{\text{cte}}{P} \right)^{1/\gamma}$ et $P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma$

$$\Rightarrow dH = VdP = \frac{\text{cte}}{P^{1/\gamma}} dP \Rightarrow H_B - H_A = \int_A^B \text{cte} \cdot P^{-1/\gamma} dP = \text{cte} \left[P \cdot P^{-1/\gamma} \right]_A^B \cdot \frac{1}{1-1/\gamma}$$

$$\Rightarrow H_B - H_A = \frac{\gamma}{\gamma-1} (P_B V_B - P_A V_A) = \frac{\gamma}{\gamma-1} N k_B (T_B - T_A)$$

Or $\gamma = \frac{C_p}{C_v} \Rightarrow \frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{C_p}{C_p - C_v}$, Avec Mayer dans les gaz parfait:

$$C_p - C_v = N k_B \Rightarrow (C_p - C_v) = \frac{N k_B}{m}$$

$$\Rightarrow \Delta H = \frac{m C_p}{\frac{N k_B}{m}} (T_B - T_A) \Rightarrow \Delta H = H_B - H_A = W_{elec}$$

$$\Rightarrow W_{elec} = C_p \cdot m \cdot (T_B - T_A)$$

c) " Faire ΔH pour B → C "

$$\Delta H = H_C - H_B = \int_B^C dH = \int_B^C (T ds + \underbrace{VdP}_{=0}) = T \int_B^C ds + m c_p (T_C - T_B)$$

$$\Rightarrow \Delta H = \underbrace{T(S_C - S_B)} + m c_p (T_C - T_B)$$

$$= \alpha^{B \rightarrow C} \text{ par définition, } \Rightarrow m \alpha^{B \rightarrow C} (\text{monique}) = -m \alpha^{C \rightarrow B}$$

$$\Rightarrow \Delta H = m c_p (T_C - T_B) - m \alpha_c$$

↳

d) Soit C_p^{liq} la capacité calorifique massique du liquide, et X_D la fraction molaire de vapeur en D. \rightarrow même que: $C_p^{liq}(T_A - T_C) + X_D \Delta_0 = 0$

C \rightarrow D est adiabatique et $W = 0 \Rightarrow \Delta H = 0$

$$\Delta H = H_D - H_C = m C_p^{liq} (T_D - T_C) + m X_D \Delta_0 = 0$$

$$\Rightarrow C_p^{liq} (T_D - T_C) + X_D \Delta_0 = 0$$

\rightarrow chaleur (liquide + gaz) = 0

On sait que $T_D = T_A$:

$$\Rightarrow C_p^{liq} (T_A - T_C) + X_D \Delta_0 = 0$$

e) démontrer que $C_p (T_C - T_A) - \Delta_c + (1 - X_D) \Delta_0 = 0$

Remarquons que $Q_{D \rightarrow A}$ = chaleur obtenue par le liquide pour passer en vapeur $\Rightarrow Q_{D \rightarrow A} = m (1 - X_D) \Delta_0 = H_A - H_D$ (car $W = 0$)

Dans un cycle: $\Delta H_{cycle} = 0 = Q_{tot} + W_{act}$

$$\Rightarrow Q_{DA} + Q_{BC} + W_{act} = 0$$

$$\Rightarrow m (1 - X_D) \Delta_0 + m C_p (T_C - T_B) - m \Delta_c + m C_p (T_B - T_A) = 0$$

$$\Rightarrow C_p (T_C - T_A) - \Delta_c + (1 - X_D) \Delta_0 = 0 \quad \square$$

f) Exprimer le coefficient de performance du réfrigérant $\epsilon = \frac{Q_{D \rightarrow A}}{W_{act}}$, en fait de $m, C_p, C_p^{liq}, \Delta_c, \Delta_0$ et W_{act} .

$$\text{"d"} \rightarrow C_p^{liq} (T_C - T_A) = X_D \Delta_0 \Rightarrow X_D = \frac{C_p^{liq} (T_C - T_A)}{\Delta_0} \quad (1)$$

$$\text{"e"} \rightarrow C_p (T_C - T_A) - \Delta_c - \Delta_0 + X_D \Delta_0 = \Delta_c - \Delta_0 + C_p^{liq} (T_C - T_A)$$

$$\Rightarrow (T_C - T_A) = \frac{\Delta_c - \Delta_0}{C_p - C_p^{liq}} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \epsilon = \frac{m (1 - X_D) \Delta_0}{W_{act}} = \frac{m}{W_{act}} (\Delta_0 - C_p^{liq} (T_C - T_A))$$

$$= \frac{m}{W_{act}} \left(\Delta_0 (C_p - C_p^{liq}) - C_p^{liq} (\Delta_c - \Delta_0) \right) = \frac{m}{W_{act}} \left(\Delta_0 C_p - C_p^{liq} \Delta_c \right)$$

$$\Rightarrow \epsilon = \frac{m}{W_{act}} \left(\frac{\Delta_0 C_p - C_p^{liq} \Delta_c}{C_p - C_p^{liq}} \right) \quad \square$$

Q3) Thème de supraconductivité :

excitation magnétique unique $\mathcal{H}_c(T) = \mathcal{H}_c(0) \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right)$

Un bancou magnétique de volume V est dans un champ \vec{B}_0 externe
créé par un solénoïde entourant le bancou (B est dans l'axe du bancou).
On suppose une orientation nulle
à l'intérieur du bancou, on a $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$

→ variable qui caractérise le bancou soit T et \vec{H} .

(a) Montrer que à l'équilibre, à T et \vec{H} donnés, la phase à l'équilibre est
celle qui minimise le potentiel $F = U - v\vec{H} \cdot \vec{B}$ ($F =$ énergie libre).

Soit F_N et F_S les potentiels des phases normale et supraconductrice
de matériaux sans supraconductance si $F_S(T, \vec{H}) \leq F_N(T, \vec{H})$.

→ énergie libre $F = U - TS$ et $\Delta F = \Delta U - T\Delta S$.

$$\Rightarrow \Delta F = \Delta U - T\Delta S - v\vec{H} \cdot \Delta\vec{B}$$

On voit que :

• $\Delta U = Q + W$, que V est constant,

et que le travail électromagnétique : $W_{em} = v\vec{H} \cdot \Delta\vec{B}$ ($\vec{E} = \vec{0}$)

$$\Rightarrow \Delta U = Q + v\vec{H} \cdot \Delta\vec{B}$$

$$\Rightarrow \Delta F = Q + \cancel{v\vec{H} \cdot \Delta\vec{B}} - T\Delta S - \cancel{v\vec{H} \cdot \Delta\vec{B}} = Q - T\Delta S$$

Or par le 2^{ème} principe : $\Delta S \geq Q/T \Rightarrow Q \leq T\Delta S$

$$\Rightarrow \Delta F = Q - T\Delta S \leq 0$$

→ donc F est minimisé !

(b) Définition de l'excitation magnétique \vec{H} , mes dans \vec{H} , \vec{B}_0 , dans le
bancou de sorte que $\vec{B} = \vec{B}_0$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{m} \quad \text{où } \vec{m} \text{ est l'aimantation}$$

dans la phase normale (μ_n), $\vec{m} = \vec{0}$.

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad \text{On voit que } \vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_0$$

(c) "Mg $dF = -SdT - V\vec{B} \cdot d\vec{H}$, par les mêmes raisonnements"

$$F_N(T, \vec{H}) - F_N(T, 0) \text{ et } F_S(T, \vec{H}) - F_S(T, 0)$$

→ Prenons une transformation réversible ($\Rightarrow dQ = TdS$)

$$\Rightarrow dU = \delta Q + \delta W = TdS + V\vec{H} \cdot d\vec{B}$$

$$F = F - V\vec{H} \cdot \vec{B} = U - TS - V\vec{H} \cdot \vec{B}$$

$$\Rightarrow dF = dU - TdS - SdT - V\vec{H} \cdot d\vec{B} - V\vec{B} \cdot d\vec{H}$$

$$dF = -SdT - V\vec{B} \cdot d\vec{H}$$

on intègre à T fixé (en $d\vec{H}$), et en considérant que

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H} \text{ en } \phi_N \text{ et } \vec{B} = \vec{0} \text{ en } \phi_S$$

$$\Rightarrow F_N(T, \vec{H}) - F_N(T, 0) = - \int_0^{\vec{H}} V\mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{H} = -\frac{1}{2} V\mu_0 \vec{H}^2$$

$$\text{et } F_S(T, \vec{H}) - F_S(T, 0) = 0 \Rightarrow F_S(T, \vec{H}) = F_S(T, 0)$$

(d) "Que vaut $F_S(T, H_c(t))$?"

lorsque $\vec{H}_c(t) = \vec{H} \rightarrow$ il n'y a plus de superconductivité.

$$\Rightarrow F_S(T, H_c(t)) = F_N(T, H_c(t))$$

(e) "Trouver que: $F_S(T, \vec{H}) - F_N(T, \vec{H}) = \frac{1}{2} V\mu_0 (H^2 - H_c^2)$ "

$$\text{On a montré que } F_S(T, \vec{H}) = F_S(T, 0) = F_S(T, \vec{H}_c(t)) = F_N(T, \vec{H}_c(t)) = F_N(T, 0) - \frac{1}{2} V\mu_0 H_c^2$$

$$\Rightarrow F_N(T, H_c(t)) = (F_N(T, H) + \frac{1}{2} V\mu_0 H^2) - \frac{1}{2} V\mu_0 H_c^2$$

$$\Rightarrow F_S(T, \vec{H}) - F_N(T, \vec{H}) = \frac{1}{2} V\mu_0 (H^2 - H_c^2)$$

(f) "Montrer que le champ critique de transition $H_c^2(T) = \mu_0 VT \left(\frac{dH_c}{dT} \right)^2$.
Que peut-on dire de l'échelle de la transition?"

$$\Rightarrow Z^{N \rightarrow S}(T) = T(S_S - S_N) \text{ par définition.}$$

$$\text{Or } S_N = -\frac{\partial F_N}{\partial T} \text{ et } S_S = -\frac{\partial F_S}{\partial T} \Rightarrow Z^{N \rightarrow S}(T) = -T \left(\frac{\partial (F_S - F_N)}{\partial T} \right)$$

$$Z = T(S_S - S_N) = \mu_0 VT H_c \frac{dH_c}{dT}$$

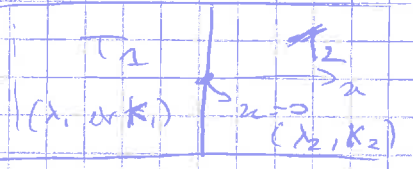
lorsque $\vec{H} = \vec{H}_c(T)$, il n'y a aucun champ critique \Rightarrow discontinuité de F au premier ordre en T.

dérivée seconde discontinue en T à la transition

\rightarrow transition du second ordre.

Q4) Température entre 2 corps :

2 corps en contact avec des températures T_1 et T_2
 en $x=0$ et $t=0$.



λ = conductivité thermique et k = diffusivité thermique

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0, t=0}$$

(a) Montrer que l'eq. de chaleur pour un corps de diffusivité k peut s'exprimer sous la forme $\frac{dT}{du^2} + 2u \frac{dT}{du} = 0$ en posant $u = \frac{x}{\sqrt{4kt}}$

eq. de chaleur $\frac{\partial T}{\partial t} + \underbrace{\nabla \cdot \vec{\nabla} T}_{=0 \text{ (solide)}} = k \underbrace{\nabla^2 T}_{=0 \text{ (pas de source)}}$ et $T(x, t)$.

$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T$ en posant $u = \frac{x}{\sqrt{4kt}}$

$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial u} \frac{du}{dt} = \frac{\partial T}{\partial u} \cdot \frac{x}{\sqrt{4kt}} \cdot \frac{-1}{2} t^{-3/2} = \frac{\partial T}{\partial u} \cdot u \cdot (-1)$

$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial u} \frac{du}{dx} = \frac{\partial T}{\partial u} \frac{1}{\sqrt{4kt}}$ et $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 = \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} \cdot \frac{1}{4kt}$

$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial u} \cdot u \cdot (-1) = k \frac{1}{4kt} \frac{\partial^2 T}{\partial u^2}$

$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + 2u \frac{\partial T}{\partial u} = 0 \quad (\Rightarrow T''(u) + 2uT'(u) = 0)$

(b) Montrer que la solution est de la forme $T(u) = A \int_0^u e^{-v^2} dv + B$, de la même façon

les conditions aux limites de $T(t)$ avec les conditions au bord

$\frac{\partial T'(u)}{\partial u} = -2u T'(u) \Rightarrow \frac{\partial T'}{\partial T'} = -2u du \xrightarrow{\text{intégrer}} \ln(T'(u)) = -u^2 + C$

$\Rightarrow T'(u) = e^C \cdot e^{-u^2} \Rightarrow T(u) - T(0) = A \int_0^u e^{-v^2} dv$ avec $A = e^C$.

On : $T(x \rightarrow \infty, t) = T_2$; $T(x \rightarrow -\infty, t) = T_1$ et $T(0, t) = T_c$

$\Rightarrow T_2 - T_c = A \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv = A \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow A = \frac{2(T_2 - T_c)}{\sqrt{\pi}}$

$\Rightarrow T(x \geq 0, t) = T_c + \frac{2(T_2 - T_c)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-v^2} dv$

et $\Rightarrow T_1 - T_c = A \int_{-\infty}^0 e^{-v^2} dv = -A \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow A = \frac{2(T_c - T_1)}{\sqrt{\pi}}$

$\Rightarrow T(x < 0, t) = T_c + \frac{2(T_c - T_1)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{-x}{\sqrt{4kt}}} e^{-v^2} dv$

(c) Avec la loi de Fourier, calcule les courants de chaleur $\vec{J}_1(x, t)$ et $\vec{J}_2(x, t)$ dans chaque direction.

$\vec{J}_1(x, t) = -\lambda_1 \vec{\nabla} T$ et $\vec{J}_2(x, t) = -\lambda_2 \vec{\nabla} T$



$$\bullet \vec{J}_1(x,t) = -\lambda_1 \vec{\nabla} T$$

$$\text{Or } \vec{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u} = A e^{-ax^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4k_1 t}}$$

$$\Rightarrow \vec{J}_1(x,t) = \lambda_1 (T_c - T_1) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-x^2/4k_1 t} \cdot \frac{1}{\sqrt{4k_1 t}} = (T_c - T_1) \frac{\lambda_1}{\sqrt{\pi k_1 t}}$$

$$\bullet \vec{J}_2(x,t) = -\lambda_2 \vec{\nabla} T$$

$$\text{Or } \vec{\nabla} T = A_2 e^{-ax^2} \frac{1}{\sqrt{4k_2 t}}$$

$$\Rightarrow \vec{J}_2(x,t) = (T_c - T_2) \frac{\lambda_2}{\sqrt{\pi k_2 t}}$$

③ Montrer par continuité que la température de contact est donnée par

$$T_c = \frac{\gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \text{ en précisant les expressions des coefficients d'opacité thermique}$$

γ_1 et γ_2 . + Expliquer pourquoi toucher un morceau de bois ou de laine ne provoque pas de brûlure contrairement à une pièce métallique en sachant

$$\text{que } \gamma_{\text{bois}} \ll \gamma_{\text{air}} \ll \gamma_{\text{métal}}$$

en régime stationnaire: $J_1(0,t) = J_2(0,t)$

$$\Rightarrow \frac{(T_1 - T_c) \lambda_1}{\sqrt{\pi k_1 t}} = \frac{(T_c - T_2) \lambda_2}{\sqrt{\pi k_2 t}} \quad e^0 = 1$$

$$\Rightarrow (T_1 - T_c) \frac{\lambda_1}{\sqrt{k_1}} = (T_c - T_2) \frac{\lambda_2}{\sqrt{k_2}}$$

$$\text{On pose } \gamma_1 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{k_1}} \text{ et } \gamma_2 = \frac{\lambda_2}{\sqrt{k_2}} \Rightarrow (T_1 - T_c) \gamma_1 = (T_c - T_2) \gamma_2$$

$$\Rightarrow T_c (\gamma_1 + \gamma_2) = T_1 \gamma_1 + T_2 \gamma_2$$

$$\Rightarrow T_c = (T_1 \gamma_1 + T_2 \gamma_2) / (\gamma_1 + \gamma_2)$$

$$\bullet \gamma_{\text{bois}} \ll \gamma_{\text{air}} \Rightarrow T_1 \gamma_1 + T_2 \gamma_2 \approx T_{\text{air}} \gamma_{\text{air}} \text{ et } \gamma_1 + \gamma_2 \approx \gamma_{\text{air}}$$

$$\Rightarrow T_c \approx T_{\text{air}}$$

due faible différence de température à l'interface avec le corps

$$\bullet \text{ ou } \gamma_{\text{air}} \ll \gamma_{\text{métal}} \Rightarrow T_c \approx T_{\text{métal}}$$

\Rightarrow grande différence de temp à l'interface avec le corps

EXAMEN : Thermo : Août 2016

Q1) Efficacité d'une pompe à chaleur

cycle (à P_1) détente isobare puis • compression adiabatique, puis • compression isobare (à P_2) et enfin une • détente adiabatique.

On suppose le gaz parfait, et N constant au cours du cycle.

a) Dans quel cas les performances sont-elles optimales ? (à retenir dans ce cas).
→ par des transformations réversibles.

b) Représenter les différentes transformations dans des diagrammes $P-V$, $P-S$ et $T-S$.

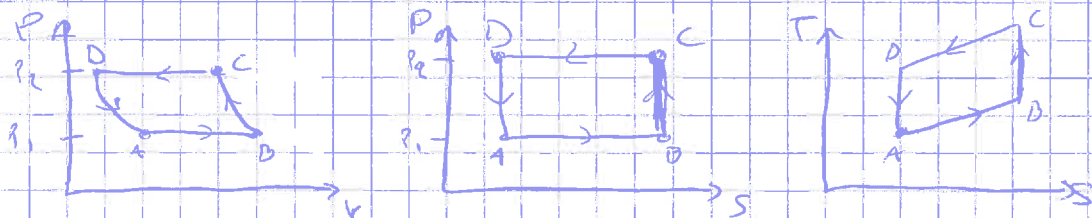
avec $PV = nRT$ et $dS \geq \frac{dQ}{T}$ ($\Rightarrow dS = \frac{dQ}{T}$)

1) détente isobare : $V \uparrow$ et $P = \text{cte} \Rightarrow T \uparrow \rightarrow S \uparrow$ ($A \rightarrow B$)

2) compression adiabatique : $V \downarrow$ et $dQ = 0 \Rightarrow P \uparrow$ et $S = \text{cte}$ ($B \rightarrow C$)

3) compression isobare : $V \downarrow$ et $P = \text{cte} \Rightarrow T \downarrow \rightarrow S \downarrow$ ($C \rightarrow D$)

4) détente adiabatique : $V \uparrow$ et $dQ = 0 \Rightarrow P \downarrow$ et $S = \text{cte}$ ($D \rightarrow A$)



c) Calculez l'efficacité max E , en fonction de P_1, P_2 , ainsi que de $\gamma = C_p/C_v$.

$E = \frac{|Q_1|}{W}$ [avec $\gamma = \frac{C_p}{C_v} \Rightarrow \frac{1}{\gamma-1} = \frac{C_v}{C_p - C_v} = C_v N k_B$]

• $W_{AB} = -P_1 \int_A^B dV = P_1 (V_A - V_B)$; et : $W_{CD} = -P \int dV = P_2 (V_C - V_D)$

• $W_{BC} (dQ=0) = C_v \int_B^C dT = C_v (T_C - T_B) = C_v N k_B (P_2 V_C - P_1 V_B) = \frac{1}{\gamma-1} (-\dots)$

• $W_{DA} (dQ=0) = -C_v (T_A - T_D) = \dots = \frac{1}{\gamma-1} (P_1 V_A - P_2 V_D)$

$\Rightarrow W_{tot} = \sum W_i = \frac{1}{\gamma-1} (P_1 V_A - P_1 V_B + P_1 V_A - P_2 V_D) + (P_2 V_C - P_2 V_D)$
 $= \frac{\gamma}{\gamma-1} (P_1 (V_A - V_B) + P_2 (V_C - V_D))$

$(Q_{co} = -Q_{AD})$

$\int_{C \rightarrow D} dQ = T dS = T \frac{dP}{dT} dT = C_p dT = C_p (T_D - T_C) = \frac{\gamma}{\gamma-1} P_2 (V_D - V_C) < 0$

On a fait ainsi que pour $PQ \Rightarrow \Rightarrow PV^r = \text{div}$

$$\Rightarrow \text{infiniesse } V_B = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/r} V_C \text{ et } V_A = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/r} V_D$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = \frac{|\mathcal{Q}|}{W} \text{ Or } Q_{D \rightarrow C} \leq 0 \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{-Q_{C \rightarrow D}}{W}$$

$$\mathcal{E} = \frac{(\cancel{\sigma_{D \rightarrow C}}) P_2 (V_C - V_D)}{(\cancel{\sigma_{D \rightarrow C}}) (P_1 (V_A - V_B) + P_2 (V_C - V_D))} = \left(1 - \frac{P_1 (V_B - V_A)}{P_2 (V_C - V_D)}\right)^{-1} =$$

$$= \left(1 - \frac{\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/r} P_1 (V_C - V_D)}{P_2 (V_C - V_D)}\right)^{-1} = \boxed{\left(1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1-r}{r}}\right)^{-1} = \mathcal{E}}$$

Thémo
2016

Q2) Transition ordre-désordre dans les alliages :

alliage de laiton (Cu-Zn), Cu demeure de Tc → ordonné. α = Cu et β = Zn
 en T ≥ Tc, les sites α et β sont occupés indifféremment par du Cu ou Zn.



Paramètre d'ordre de la transition $P = 2p - 1$, où $p = n_{Cu}$
 pour que $\alpha = Cu$. On admet de l'énergie interne U , et l'entropie

de Nohmes, notées par $U(P, T, N) = U_0(T, N) + N_0 P^2$

et $S(P, T, N) = S_0(T, N) + k_B N \left(\ln(2) - \frac{1}{2} \left[(1+P) \ln(1+P) + (1-P) \ln(1-P) \right] \right)$

($\alpha = Cu$ et $N = Cu$)

a) Que vaut P à T = 0 et T ≥ Tc ?

$T = 0 \rightarrow P = 1$, $T \geq Tc \rightarrow P = 0$

b) Montre que $S_0(T=0, N) = 0$

$T = 0 \rightarrow P = 0$ et $\ln(1) = 0$

→ les termes en P s'annulent $(1+P) \ln(1+P) = 2 \ln(2)$

⇒ $S(P, T=0, N) = S_0(T=0, N)$

Par la 3ème principe de la thermo, $S(T=0, N) = 0$

⇒ $S_0(T=0, N) = 0$

c) Montre que un développement limité au voisinage $T \approx Tc$

$S(P, T, N) \approx S_0(T, N) + k_B N \left\{ \ln(2) - \frac{P^2}{2} - \frac{P^4}{12} \right\}$

$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} (-1)^{n+1}$

⇒ $(1+P) \ln(1+P) \approx (1+P) \left(P - \frac{P^2}{2} + \frac{P^3}{3} - \frac{P^4}{4} \right) = P - \frac{P^2}{2} + \frac{P^3}{3} - \frac{P^4}{4} + P^2 - \frac{P^3}{2} + \frac{P^4}{3}$
 $\approx P + \frac{P^2}{2} - \frac{P^3}{6} + \frac{P^4}{12}$

~~... (crossed out text) ...~~

en faisant $P \rightarrow -P \Rightarrow (1-P) \ln(1-P) \approx -P + \frac{P^2}{2} + \frac{P^3}{3} + \frac{P^4}{12}$

⇒ $S(P, T, N) \approx S_0(T, N) + k_B N \left\{ \ln(2) - \frac{1}{2} \left(P + \frac{P^2}{2} - \frac{P^3}{3} + \frac{P^4}{12} - P + \frac{P^2}{2} + \frac{P^3}{3} + \frac{P^4}{12} \right) \right\}$
 $\approx S_0(T, N) + k_B N \left\{ \ln(2) - \frac{P^2}{2} - \frac{P^4}{12} \right\}$ etc !

d) Quel est la condition d'équilibre thermo à $T = \alpha T_c$, Calculez P en fctⁿ de T , et déduire une expression pour T_c

Équilibre thermo à $T = \alpha T_c \rightarrow$ déterminé par le min de $F = U - TS$

$$F = \underbrace{U_0(T, N) - TS_0(T, N)}_{F_0(T, N)} + N \alpha P^2 - T k_B N \left(\ln(2) - \frac{\sigma^2}{2} - \frac{P^4}{12} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial P} \right)_{T, N} = 2 N \alpha P + k_B T N \left(P + \frac{P^3}{3} \right) = 0$$

$$\Rightarrow 3 \left(\frac{2 \alpha}{k_B T} + 1 \right) + P^2 = 0 \Rightarrow P = 0 \quad \text{si} \quad T_c = \frac{2 \alpha}{k_B}$$

$$\Rightarrow P^2 + 3 \left(\frac{2 \alpha}{k_B} + T \right) = 0 \Leftrightarrow P^2 + \frac{3}{T} (T - T_c) = 0$$

$$\Rightarrow P = \left(\frac{3(T_c - T)}{T} \right)^{1/2} \approx \left(\frac{3(T_c - T)}{T_c} \right)^{1/2} \quad \text{pour } T \lesssim T_c.$$

e) Exprimer l'entropie de l'alliage à l'équilibre volume $T = T_c$, montrer que la capacité calorifique présente une discontinuité en $T = T_c$. Que peut-on déduire de l'ordre de la transition ?

$$\text{Pour } T \lesssim T_c : S(P, T, N) = S_0(T, N) + k_B N \left\{ \ln(2) - \frac{3}{2} \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^2 \right\}$$

(on laisse tomber P^4/k)

Est continue à la transition $T = T_c$!

mais pour $T > T_c$:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_{P, N} = \left. \frac{\partial S_0}{\partial T} \right|_N$$

Or, pour $T \lesssim T_c$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_{P, N} = \left. \frac{\partial S_0}{\partial T} \right|_N + \frac{3 k_B N}{2 T_c}$$

\rightarrow discontinuité à la transition $T = T_c$!

Or $C = - \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \Rightarrow$ dérivée seconde discontinue

\Rightarrow transition du second ordre !

• Capacité calorifique : $C = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_N$!

$\rightarrow C_p$ ou C_v sont discontinues en $T = T_c$

Q3) Loi de Newton sur le rayonnement :

Un échantillon solide assimilable à un corps noir de surface Σ est dans une enceinte maintenue à T_0 .

a) Rappelez la définition d'un corps noir :

→ est un corps qui absorbe tout rayonnement incident
 $\alpha_{\text{absorbé}} = 1$ et $\alpha_{\text{réfléchi}} = 0$

b) Montrer que l'énergie rayonnée par l'échantillon à température T dans un intervalle dt est donnée par $dU_{\text{émis}} = -\frac{\sigma c}{4} T^4 \Sigma dt$

Soit $d\Sigma$ un élément de Σ : $dU = \sigma T^4 dV$

 rayonnement émis en \vec{k} : $dU = -U \frac{dV}{V}$

$\Rightarrow dU_{\vec{k}} = -U \cdot \frac{d\Sigma \cdot c \cdot dt \cos \theta}{V} \cos \theta \frac{d\Omega}{4\pi}$

comme élément solide un angle solide : $\cos \theta d\Omega = \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi$

$\Rightarrow \Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta$
 $= \pi [-\cos^2(\theta)]_0^{\pi/2} = \pi \cdot \frac{2}{2} = \pi$

$\Rightarrow dU_{\vec{k}} = U \cdot \frac{\Sigma c dt}{V} \cdot \frac{\pi \Omega}{4\pi}$ (4π car on balaye la surface de la sphère)

$\Rightarrow dU_{\vec{k}} = -\frac{\sigma c}{4} T^4 \Sigma dt$ (car émis)

Montrer que l'énergie reçue par l'échantillon en dt est $dU_{\text{r}} = \frac{\sigma c}{4} T_0^4 \Sigma dt$ même rayonnement, mais avec température T_0

$\Rightarrow dU = \frac{\sigma c}{4} T_0^4 \Sigma dt$

c) en supposant que $|T - T_0| \ll T_0$, on a la variation d'énergie interne de l'échantillon : $dU \approx K \Sigma (T_0 - T) dt$ (K est une constante)

comme $dU_{\vec{k}} < 0 \Rightarrow dU = dU_{\vec{k}} + dU_{\text{reçu}}$

$\Rightarrow dU = \frac{\sigma c}{4} \Sigma dt (T_0^4 - T^4)$

comme $|T - T_0| \ll T_0 \rightarrow$ on pose $\delta T = T - T_0$

on a $\frac{\delta T}{T_0} = \frac{T}{T_0} - 1 \Rightarrow (T_0^4 - T^4) = T_0^4 (1 - (\frac{T}{T_0})^4) = \dots$
 $= \frac{\delta T}{T_0} (1 + (\frac{T}{T_0})^3)$

en développant $(1+x)^n$ en Taylor $\rightarrow (1+x)^n \approx 1 + nx + \dots$

$$\Rightarrow = T_0^3 \left(\sqrt{T} + 4 \frac{dT}{T_0} \right)$$

$$\Rightarrow dU \approx \frac{\sigma c \epsilon T_0^3}{\lambda} (4 \delta T) = \sigma c \epsilon dT T_0^3 (T - T_0)$$

$$\Rightarrow \text{avec } k = \sigma c T_0^3$$

$$\Rightarrow dU \approx k \Sigma dT (T_0 - T)$$

b) donner le temps τ précédent, pour que la température de l'échantillon varie de T_1 à T_2 en fonction de m et c_v (monique).

$$\text{avec } dU \approx k \Sigma dT (T_0 - T)$$

$$\text{et } dU = \delta Q = m c_v dT \quad (m c_v = C_v)$$

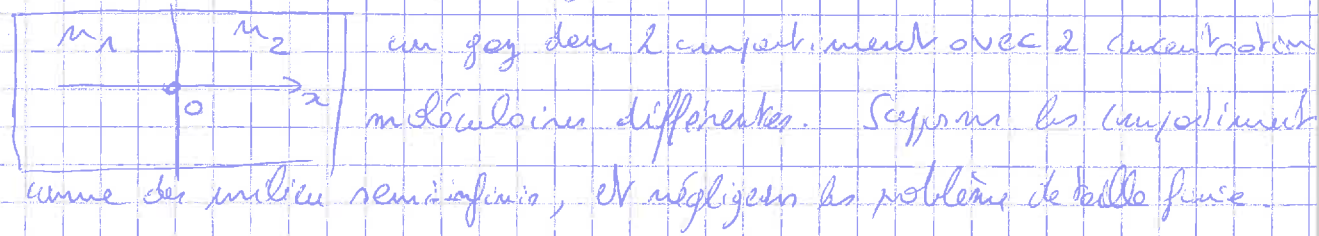
$$\Rightarrow k \Sigma dT (T_0 - T) = m c_v dT$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{(T - T_0)} = - \frac{k \Sigma}{m c_v} dT \Rightarrow \ln \left(\frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0} \right) = - \frac{k \Sigma}{m c_v} (T_2 - T_1)$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{m c_v}{k \Sigma} \ln \left(\frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0} \right) = \frac{m c_v}{k \Sigma} \ln \left(\frac{T_1 - T_0}{T_2 - T_0} \right)$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{m c_v}{k \Sigma} \ln \left(\frac{T_1 - T_0}{T_2 - T_0} \right) \rightarrow \text{ok!}$$

Q4 Diffusion de molécules de gaz :



On retire la cloison en $x=0$ et $t=0$.

La diffusion est régie par les équations suivantes : $\frac{\partial m(x,t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 m(x,t)}{\partial x^2}$
 (K = coefficient de diffusivité).

a) On pose en posant $u = \frac{x}{\sqrt{4Kt}}$, on peut l'exprimer comme $\frac{\partial^2 m}{\partial u^2} + 2u \frac{\partial m}{\partial u} = 0$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial m}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial m}{\partial u} \cdot \frac{x}{\sqrt{4Kt}} \cdot \frac{-1}{2} = \frac{\partial m}{\partial t} \cdot u \cdot \left(\frac{-1}{2t}\right)$$

$$\frac{\partial m}{\partial x} = \frac{\partial m}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial m}{\partial u} \cdot \frac{1}{\sqrt{4Kt}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} = \frac{\partial m}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial m}{\partial u^2} \cdot \frac{1}{4Kt}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial m}{\partial u} \cdot \frac{u}{2t} = K \frac{\partial^2 m}{\partial u^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 m}{\partial u^2} + 2u \frac{\partial m}{\partial u} = 0$$

b) On suppose la solution s'écrit comme $m(u) = A \int_0^u e^{-v^2} dv + B$, trouver A et B

$$\frac{d m'(u)}{du} = -2u m'(u) \Rightarrow \frac{d m'(u)}{m'(u)} = -2u du$$

$$\Rightarrow \ln(m'(u)) = -u^2 + C \Leftrightarrow m'(u) = \underbrace{e^C}_{=A} \cdot e^{-u^2}$$

$$\Rightarrow m(u) - m(0) = A \int_0^u e^{-v^2} dv$$

• conditions au bords :

$$m(x \gg 0, t=0) = m_2 \quad \text{et} \quad m(x < 0, t=0) = m_1$$

On $t=0 \rightarrow u \rightarrow \infty \Rightarrow$ nous $m_\infty = (m_1 + m_2) \frac{1}{2}$

en $x > 0$:

$$m(x > 0, t=0) = m_\infty = A \int_0^\infty e^{-v^2} dv = A \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Rightarrow m_2 - \frac{(m_1 + m_2)}{2} = \frac{m_2 - m_1}{2} = A \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{m_2 - m_1}{\sqrt{\pi}}$$

$$\Rightarrow m(x,t) = m_\infty + \frac{m_2 - m_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{4Kt}} e^{-v^2} dv$$

(c) $N-g$ est le nombre d'un temps infiniment long on a le \hat{m} (probabilité)

dans la limite $t \rightarrow \infty$, $m \rightarrow m_{\infty} = \frac{m_1 + m_2}{2}$