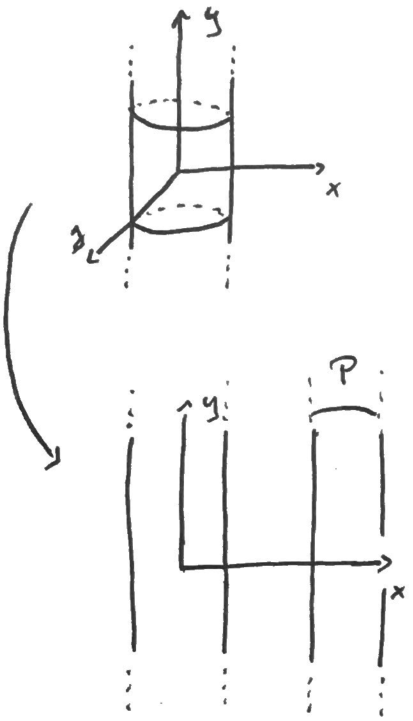
Séparation des Variables

Examen de janvier 2010 REM, exercice 6)



$$\Delta \phi = 0$$

$$\Leftrightarrow \partial_x^2 \phi + \partial_y^2 \phi = 0$$

Espérons que ϕ s'écrive comme $f(x) \cdot g(y)$.

$$\Rightarrow g(y) \partial_x^2 f(x) + f(x) \partial_y^2 g(y) = 0 \quad \Big) \frac{1}{\phi}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} \partial_x^2 f(x) + \frac{1}{g(y)} \partial_y^2 g(y) = 0$$

Notons que le potentiel est périodique en $\vec{x}$.

Posons donc $-\alpha^2 := \frac{1}{f(x)} \partial_x^2 f(x) \Leftrightarrow \partial_x^2 f(x) = -\alpha^2 f(x) \quad (1)$

donc : $\alpha^2 = \frac{1}{g(y)} \partial_y^2 g(y) \Leftrightarrow \partial_y^2 g(y) = \alpha^2 g(y) \quad (2)$

En résolvant (1) et (2) :

$$\left| \begin{array}{l} f(x) = A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x) \\ g(y) = C e^{\alpha y} + D e^{-\alpha y} \end{array} \right.$$

Nous voulons $f(x)$ périodique de période P : $f(x) = f(x+P)$

$$\Rightarrow \alpha P = 2k\pi \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_k = \frac{2\pi}{P} k$$

La solution finale est alors donnée par :

$$\phi(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \sin(\alpha_k x) + B_k \cos(\alpha_k x) \right) \left(C_k e^{\alpha_k y} + D_k e^{-\alpha_k y} \right) \quad \text{avec } \alpha_k = \frac{2\pi}{P} k$$

$$k \in \mathbb{N}$$