PHYS-F-202 Court résumé et formulaire

Gérard Pierre

BA 2 - Université libre de Bruxelles

20 janvier 2020

1 Relativité restreinte

Notons que la convention $c = 1$ est fréquente

1.1 Transformations de Lorentz

Introduction des 4-vecteurs

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} ct \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{X'} = \begin{pmatrix} ct' \\ \boldsymbol{x'} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \Lambda \boldsymbol{X'} \qquad \boldsymbol{X'} = \Lambda^{-1} \boldsymbol{X}$$

L'invariant de Lorentz reste constant au cour d'une transformation

$$S^2 = (ct)^2 - \boldsymbol{x}^2 \qquad \text{(invariant de Lorentz)}$$

Interval de type temps : $S^2 > 0$
Interval de type espace : $S^2 < 0$
Interval de type lumière : $S^2 = 0$

Matrice des transformations pour un déplacement dans la direction $\boldsymbol{x}$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) & 0 & 0 \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarquons que $\det(\Lambda) = 1$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \in [1, +\infty \qquad \beta = \frac{v}{c} \quad \in [0, 1[\qquad \tanh(\theta) = \beta$$

1.2 Les 4-vecteurs

Vecteur contravariant : $\boldsymbol{X}^\mu = (ct, x^i)$ Vecteur covariant : $\boldsymbol{X}_\mu = (ct, x_i)$

Le tenseur de la métrique de Minkowski

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(remarquons } \eta = \eta^{-1}\text{)}$$

Le produit scalaire dans la métrique de Minkowski est invariant sous les transformations de Lorentz

$$\boldsymbol{X}^\mu = \eta^{\mu\nu}\boldsymbol{X}_\nu \qquad \boldsymbol{X}_\mu = \eta_{\mu\nu}\boldsymbol{X}^\nu$$

Transformations et 4-vecteurs

$$\boldsymbol{X}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \boldsymbol{X'}^\nu$$

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

1.3 Mécanique relativiste

$$E^2 = m_0^2 c^4 + m_0^2 \boldsymbol{p}^2 \qquad \text{(formule d'Einstein)}$$

Le 4-vecteur vitesse

$$\boldsymbol{U}^\mu = (\gamma c, \gamma \boldsymbol{u})$$

Le 4-vecteur énergie impulsion

$$\boldsymbol{P}^\mu = \left(\frac{E}{c}, \boldsymbol{p}\right)$$

2 Electromagnétisme

2.1 Electrostatique et électrodynamique

La force électrostatique

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}}{|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}|^3} \qquad \text{(loi de Coulomb)}$$

Le champ électrique

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}|^3}\, \mathrm{d}Q$$

$$\boldsymbol{F} = q_1 \boldsymbol{E}$$

Le flux électrique

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \qquad \text{(loi de Gauss)}$$

Le potentiel électrique

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$$

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathrm{d}Q}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}|}$$

La densité de charge surfacique et volumique

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathbf{d}\boldsymbol{S}} \qquad \rho = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V}$$

Laplaciens et potentiel

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{(éq. de Poisson)}$$

$$\Delta\phi = 0 \tag{éq. de Laplace}$$

L'énergie d'un champ électrique

$$W = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\,\mathrm{d}V$$

Dipôle et quadrupôle

$$d_i := \sum_i q_i r_i \qquad\qquad D_{ij} := \sum_k q^{(k)}\left(3r_i^{(k)}r_j^{(k)} - \boldsymbol{r}^{(k)^2}\delta_{ij}\right)$$

2.2 Magnétisme

L'élément infinitésimale du champ magnétique

$$\mathbf{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathbf{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^3} \tag{loi de Biot et Savart}$$

L'élément ifinitésimale de force du au champ magnétique

$$\mathbf{d}\boldsymbol{F} = I\mathbf{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$$

La densitée de courant

$$\boldsymbol{j} := \frac{\mathrm{d}I}{\mathbf{d}\boldsymbol{S}} \qquad\qquad \boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{v}$$

$$\partial_t\rho + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = 0 \tag{éq. de continuité}$$

Relation entre la densitée de courant et le champ magnétique

$$\int_{\partial S}\boldsymbol{B}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{l} = \mu_0\int_S \boldsymbol{j}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S} \tag{loi d'Ampère}$$

Le vecteur potentiel

$$\boldsymbol{B} =: \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} \qquad\qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = 0$$

$$\Delta\boldsymbol{A} = -\mu_0\boldsymbol{j} \tag{gauge de Coulomb}$$

L'énergie d'un champ magnétique

$$W = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}V$$

2.3 Equations de Maxwell

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{Maxwell - Gauss}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{Maxwell - Faraday}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0 \tag{Maxwell flux magn.}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{Maxwell - Ampère}$$

3 Electromagnétisme dans la matière

Susceptibilité électrique et magnétique

$$\epsilon := \epsilon_0(1+\chi_e) \qquad \mu := \mu_0(1+\chi_m)$$

Vecteurs polarisation électrique $\boldsymbol{P}$ et aimentation magnétique $\boldsymbol{M}$

$$\rho_{pol} =: -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P} \qquad \boldsymbol{j_m} =: \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{M}$$

Champs d'excitation électrique $\boldsymbol{D}$ et magnétique $\boldsymbol{H}$

$$\boldsymbol{D} := \epsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P} \qquad \boldsymbol{H} := \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{M}$$

Certains matérieaux possèdent une relation linéaire entre la densité de polarisation et le champ electrique ou magnétique

$$\boldsymbol{P} = \epsilon_0\chi_e\boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{M} = \frac{\chi_m}{\mu}\boldsymbol{B}$$

A la frontière entre deux milieux

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D_1}-\boldsymbol{D_2}) &= \sigma_{ext} & \qquad \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B_1}-\boldsymbol{B_2}) &= 0 \\ \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E_1}-\boldsymbol{E_2}) &= \boldsymbol{0} & \qquad \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H_1}-\boldsymbol{H_2}) &= \boldsymbol{j_{ext}} \end{aligned}$$

3.1 Equations de Maxwell dans la matière

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D} &= \rho_{ext} \\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} &= 0 \\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{j_{ext}}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \end{aligned}$$