Séance 7 (partie 1) : Electric fields in media

Exo 1

Loi de Gauss :

Charges externes ; Charges induites par polarisation

$$\oiint_{\Sigma = \partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_\Sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q_{ext} + Q_p}{\epsilon_0}$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho_{ext}\, dV + \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho_p\, dV$$

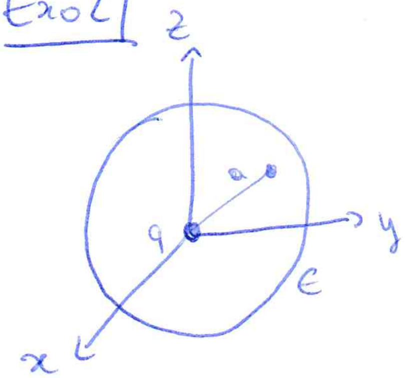
$$= \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho_{ext}\, dV - \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{P}\, dV$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho_{ext}\, dV - \frac{1}{\epsilon_0}\oiint_\Sigma \vec{P}\cdot d\vec{S}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\oiint_\Sigma (\epsilon_0\vec{E} + \vec{P})\cdot d\vec{S} = \int_V \rho_{ext}\, dV = Q_{ext}}$$

$$\Rightarrow \vec{D} \equiv \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}.$$

Exo 2



Gauss : $\oiint \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{ext}$

Symétrie sphérique : $\vec{D} = D(r)\,\vec{e}_r$
+ plans Oxy, Oxz, Oyz

$$\rightarrow D(r)\,4\pi r^2 = Q_{ext} \rightarrow D(r) = \frac{Q_{ext}}{4\pi r^2}$$

$\rightarrow \quad D(r) = \frac{q}{4\pi r^2} \quad \forall r.$

$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon}\vec{D}$ et $\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0)\vec{E} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)\vec{D}$

$$\Rightarrow \boxed{E(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon} & r < a \\ \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0} & r > a \end{cases}}$$

ca $\longrightarrow$ ϵ_a ϵ_0.

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \Rightarrow E(r)\vec{u_r} = -\partial_r \phi \vec{u_r}$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi r \epsilon} & r < a \\ \frac{q}{4\pi r \epsilon_0} & r > a \end{cases}}$$

Discontinuités

$$\begin{cases} \vec{n}_{21} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} \\ \vec{n}_{21} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_{ext} = 0 \end{cases}$$

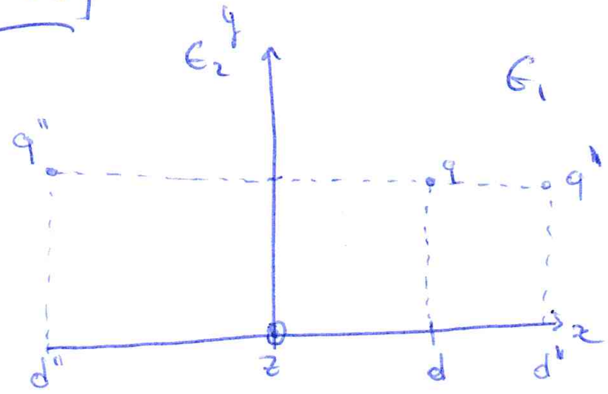
$\nexists$ charge de surface.

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r \times \vec{u}_r \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon_0}\right)\frac{q}{4\pi r^2} = \vec{0} \rightarrow \text{OK.} \\ \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r \,(1 - 1)\frac{q}{4\pi r^2} = 0 \rightarrow \text{OK.} \end{cases}$$

Polarisat°

$$\vec{P}(r) = (\epsilon - \epsilon_0)\vec{E}(r) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)\frac{q}{4\pi r^2} & r < a \\ \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1\right)\frac{q}{4\pi r^2} & r > a \end{cases}$$

Exo 3



On a ici deux milieux de permittivité ϵ_1 et ϵ_2 qui sont en contact via le plan Oyz. Dès lors, la charge q va induire une polarisation différente dans les deux milieux et le bilan de ces deux polarisations sera normal à la surface de séparation (= plan Oyz).

$\Rightarrow$ Densité surfacique de charges induites.

On utilise la méthode des images :

$$\phi(x,y,z) = \begin{cases} \phi_q + \phi_{q''} & x \geq 0 \\ \phi_{q'} & x \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\epsilon_1}\left[\dfrac{q}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} + \dfrac{q''}{\sqrt{(x-d'')^2+y^2+z^2}}\right] & x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{1}{4\pi\epsilon_2}\left[\dfrac{q'}{\sqrt{(x-d')^2+y^2+z^2}}\right] & x \leq 0 \end{cases}$$

Nous cherchons $(q';d')$ et $(q'';d'')$ tel que le potentiel généré soit le même que celui généré par la situation.

Pour cela, nous avons plusieurs relations venant des (dis)-continuités :

① $$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \phi(x,y,z) = \lim_{x\to 0^-} \phi(x,y,z)} \quad (1.1)$$

Vient de la symétrie

② $\vec{n}_{21} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$ → 2 éq° redondantes venant de $\vec{E}_1$

③ $\vec{n}_{21} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \vec{0}$ → 1 éq° venant de $\vec{D}_1$

Car que des charges induites, pas de charge externes sur la surface.

Avec $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ et $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$.

②: $\vec{u}_x \times [-\partial_y \phi_2 \vec{u}_y - \partial_z \phi_2 \vec{u}_z + \partial_y \phi_1 \vec{u}_y + \partial_z \phi_1 \vec{u}_z] \overset{!}{=} \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \partial_y \phi_1 = \partial_y \phi_2 & (2.1) \\ \partial_z \phi_1 = \partial_z \phi_2 & (2.2) \end{cases} \quad \text{Lorsque } x \to 0}$$

③: $\vec{u}_x \cdot [-\epsilon_2 \partial_x \phi_2 \vec{u}_x + \epsilon_1 \partial_x \phi_1 \vec{u}_x] \overset{!}{=} 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{\epsilon_2 \partial_x \phi_2 = \epsilon_1 \partial_x \phi_1 \quad \text{pour } x \to 0} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\epsilon_1} \dfrac{q}{\sqrt{d^2+y^2+z^2}} + \dfrac{1}{\epsilon_1} \dfrac{q''}{\sqrt{d''^2+y^2+z^2}} = \dfrac{1}{\epsilon_2} \dfrac{q'}{\sqrt{d'^2+y^2+z^2}} & \text{par } (1.1). \\ \dfrac{1}{\epsilon_1} \dfrac{(-y)q}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \dfrac{1}{\epsilon_1} \dfrac{(-y)q''}{(d''^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \dfrac{1}{\epsilon_2} \dfrac{(-y)q'}{(d'^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \text{par } (2.1) \\ \dfrac{dq}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \dfrac{d''q''}{(d''^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \dfrac{d'q'}{(d'^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \text{par } (3.1) \end{cases}$$

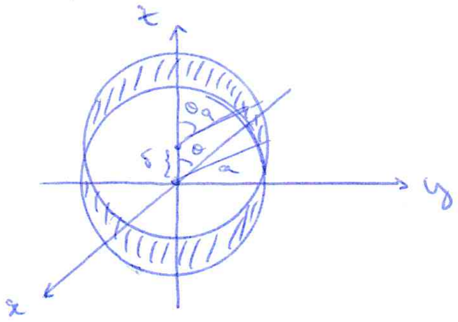
En $(y,z) = (0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{q}{\epsilon_1 |d|} + \dfrac{q''}{\epsilon_1 |d''|} = \dfrac{q'}{\epsilon_2 |d'|} & (1.1) \\ \dfrac{dq}{|d|^3} + \dfrac{d''q''}{|d''|^3} = \dfrac{d'q'}{|d'|^3} & (3.1) \end{cases}$$

Supposons (en espérant que ce soit le cas) que $|d| = |d'| = |d''|$ $\Rightarrow \boxed{d' = d \ \& \ d'' = -d}$

$$\Rightarrow \begin{cases} q + q'' = \dfrac{\epsilon_1}{\epsilon_2} q' \\ q - q'' = q' \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} q' &= \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2} q \\ q'' &= \frac{\epsilon_1-\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2} q \end{aligned}}$$

$\boxed{\text{Exo 4}}$



$$\vec{d} = \vec{P}\cdot V = \vec{P}\cdot \frac{4}{3}\pi a^3 = q\vec{\delta}$$

$$\Rightarrow dq = \rho\, dV = \rho\, \delta \cos\theta\, dA = \frac{q}{V}\,\delta \cos\theta\, dA$$

$$= P\cos\theta\, dA$$

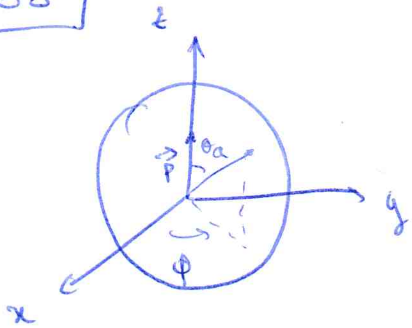
$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{dq}{d\sigma} = P\cos\theta}$$

D'autre part,

$$\begin{cases} \vec{P} = P\,\vec{u_z} \\ \vec{n} = \vec{u_r} \end{cases} \Rightarrow \vec{P}\cdot\vec{n} = \sigma_p = P\,\vec{u_z}\cdot\vec{u_r} = P\cos\theta$$

$$\rightarrow \boxed{\sigma = \sigma_p} \text{ OK.}$$

$\boxed{\text{Exo 5}}$



Symétrie d'axe Oz : $\phi \neq \phi(\varphi)$

On développe $\phi = \phi(r,\theta)$ sur une base orthonormale formée par les polynomes de Legendre :

$$\phi(r,\theta) = \sum_{l\geq 0}\left[A_l\, r^{l} P_l(\cos\theta) + B_l\, r^{-l-1} P_l(\cos\theta)\right] \quad l \in \mathbb{Z}$$

Avec : $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), \dots$

et $\sum_l C_l P_l(x) = 0 \Leftrightarrow C_l = 0 \ \forall l \in \mathbb{Z}$.

Les conditions aux bords sont:

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}\to\infty) = \vec{0} \\ \vec{E}(\vec{r}\to 0) \neq \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{r\to\infty} \phi(r,\theta) = C^{ste} = 0 & (1) \\ \lim\limits_{r\to 0} \phi(r,\theta) \nrightarrow \infty & (2) \end{cases}$$

(Dis)continuités:

$$\begin{cases} \lim\limits_{r\to a^-} \phi(r,\theta) = \lim\limits_{r\to a^+} \phi(r,\theta) & (3) \\ \vec{n}_{21} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} & (4) \end{cases}$$

$$\vec{n}_{21} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0 \Rightarrow -\epsilon_0 \partial_r \phi\Big|_{r=a^+} = -\epsilon_0 \partial_r \phi\Big|_{r=a^-} + P\cos\theta. \quad (5)$$

Solution

$$\phi(r,\theta) = \begin{cases} \sum\limits_l \left[A_l r^l P_l(\cos\theta) + B_l r^{-l-1} P_l(\cos\theta)\right] & r \leq a \\ \sum\limits_l \left[C_l r^l P_l(\cos\theta) + D_l r^{-l-1} P_l(\cos\theta)\right] & r \geq a \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \lim_{r\to\infty} \sum_{l\geq 0} C_l r^l P_l = 0 \Rightarrow \boxed{C_l = 0 \ \forall l}$$

$$(2) \Rightarrow \lim_{r\to 0} \sum_{l\geq 0} B_l r^{-l-1} P_l \nrightarrow \infty \Rightarrow \boxed{B_l = 0 \ \forall l}$$

$$\phi(r,\theta) = \begin{cases} \sum\limits_l A_l r^l P_l(\cos\theta) & r \leq a \\ \sum\limits_l D_l r^{-l-1} P_l(\cos\theta) & r \geq a \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow A_l a^l = D_l a^{-l-1} \quad \forall l \quad (6)$$

(5) pour $\begin{cases} l \neq 1 : & (l+1)\, a^{-l-2} D_l = -l\, a^{l-1} A_l \quad (7) \\ l = 1 : & 2 D_1 \dfrac{1}{a^3} = -A_1 + \dfrac{P}{\epsilon_0} \quad (8) \end{cases}$

(7) + (6) $\Rightarrow$ $\boxed{D_l = 0 \ \forall l \neq 1}$ et $\boxed{A_l = 0 \ \forall l \neq 1}$

(8) + (6) $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} A_1 = P/3\epsilon_0 \\ D_1 = Pa^3/3\epsilon_0 \end{array}}$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{P}{3\epsilon_0}\, r \cos\theta & r \leq a \\ \dfrac{P}{3\epsilon_0} \dfrac{a^3}{r^2} \cos\theta & r \geq a \end{cases}}$$

Exo 6 Devoir

Exo 7 Même exercice que n°6 mais avec $\epsilon \leftrightarrow \epsilon_0$.