Quelques notions de physique mathématique

Laurent Vanderheyden

3 janvier 2020

1 Un peu d'algèbre

• **Espace dual** : Soit $(K, +, \times)$ un corps commutatif et V un espace vectoriel sur K.

On appelle **forme linéaire** ϕ **sur** V toute application linéaire de V dans K, $\phi : V \to K$ telle que $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \times V, \forall \lambda \in K, \phi(\lambda \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{y})$.

On appelle **espace dual**, noté $V^\star$ l'ensemble des formes linéaires de V dans K. L'espace dual est un espace vectoriel.

Les éléments de V sont appelés *vecteurs* et les éléments de $V^\star$ sont appelés *covecteurs*. Les covecteurs sont donc des formes linéaires. La confusion entre vecteur et covecteur vient souvent du fait que lorsque l'on dispose d'un produit scalaire, il est possible de représenter tout élément de $V^\star$ par un élément de V : $\forall \mathbf{x} \in V$, $\exists! \phi_{\mathbf{x}} \in V^\star$ tq $\forall \mathbf{y} \in V, \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y} \in K$.

Dans le cas d'un espace euclidien $\mathbb{R}^n$ pour lequel $V = V^\star$, grâce au produit scalaire, on associe au covecteur $\phi_{\mathbf{x}}$ la transposée du vecteur $\mathbf{x}$: $\mathbf{x}^T \mathbf{x} \in K$.

• **Métrique** : La métrique d'une base est définie par la matrice des produits scalaires des vecteurs de cette base. On notera e_μ (indice ***covariant***) et $e_\star^\mu$ (indice ***contravariant***) les vecteurs de bases de V et $V^\star$ respectivement. Dès lors, la métrique d'une base de V sera donnée par,

$$\boxed{g_{\mu\nu} \equiv \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}} \tag{1.1}$$

alors que la métrique de l'espace dual $V^\star$ sera quant à elle donnée par,

$$\boxed{g^{\mu\nu} \equiv \mathbf{e}_\star^\mu \cdot \mathbf{e}_\star^\nu = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\star^0 \cdot \mathbf{e}_\star^0 & \mathbf{e}_\star^0 \cdot \mathbf{e}_\star^1 & \mathbf{e}_\star^0 \cdot \mathbf{e}_\star^2 & \mathbf{e}_\star^0 \cdot \mathbf{e}_\star^3 \\ \mathbf{e}_\star^1 \cdot \mathbf{e}_\star^0 & \mathbf{e}_\star^1 \cdot \mathbf{e}_\star^1 & \mathbf{e}_\star^1 \cdot \mathbf{e}_\star^2 & \mathbf{e}_\star^1 \cdot \mathbf{e}_\star^3 \\ \mathbf{e}_\star^2 \cdot \mathbf{e}_\star^0 & \mathbf{e}_\star^2 \cdot \mathbf{e}_\star^1 & \mathbf{e}_\star^2 \cdot \mathbf{e}_\star^2 & \mathbf{e}_\star^2 \cdot \mathbf{e}_\star^3 \\ \mathbf{e}_\star^3 \cdot \mathbf{e}_\star^0 & \mathbf{e}_\star^3 \cdot \mathbf{e}_\star^1 & \mathbf{e}_\star^3 \cdot \mathbf{e}_\star^2 & \mathbf{e}_\star^3 \cdot \mathbf{e}_\star^3 \end{pmatrix}} \tag{1.2}$$

Comme les vecteurs de la base duale sont orthogonaux aux vecteurs de la base de l'espace vectoriel V, il est possible de déduire plusieurs relations utiles :

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{e}_\star^\mu\left(\mathbf{e}_\nu\right) = \mathbf{e}_\star^\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \delta^\mu{}_\nu \\ &g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu{}_\rho \\ &\mathbf{e}_\mu = g_{\mu\nu}\mathbf{e}_\star^\nu \\ &\mathbf{e}_\star^\mu = g^{\mu\nu}\mathbf{e}_\nu \end{aligned}} \quad \begin{aligned}&(1.3)\\&(1.4)\\&(1.5)\\&(1.6)\end{aligned}$$

• **Composantes d'un vecteur** : Les composantes d'un vecteur $\mathbf{x} \in V$ dans une base sont contravariantes : $\mathbf{x} = x^\mu \mathbf{e}_\mu$, alors que les composantes du covecteur associé dans la base duale sont covariantes : $\mathbf{x} = x_\mu \mathbf{e}_\star^\mu$. Les composantes du vecteur dans la base sont liées aux composantes du covecteur dans la base duale, toujours grâce à l'orthogonalité des bases. En pratique, la métrique permet de "monter" les indices covariants ou de "descendre" les indices contravariants alors que la delta de Kroenecker permet de les renommer :

$$\boxed{\begin{aligned} x_\mu &= g_{\mu\nu}x^\nu \\ x^\mu &= g^{\mu\nu}x_\nu \end{aligned}} \quad \begin{aligned}&(1.7)\\&(1.8)\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_\mu &= \delta_\mu{}^\nu x_\nu \\ x^\mu &= \delta^\mu{}_\nu x^\nu \end{aligned}} \quad \begin{aligned}&(1.9)\\&(1.10)\end{aligned}$$

• **Les tenseurs** : Soit $(K, +, \times)$ un corps commutatif et V un espace vectoriel sur K.

On appelle **tenseur T de rang 2** toute application bilinéaire de V dans K, $\mathbf{T} : V \times V \to K$ tel que $\forall\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right) \in V \times V, \mathbf{T}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right) = \mathbf{x}^T\mathbf{T}\mathbf{y} \in K$.

Les tenseurs sont définis par leurs composantes dans un produit direct (ou produit tensoriel) de vecteurs de base et/ou base duale :

$$\boxed{\mathbf{T} = T^{\mu\nu}\mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu = T^\mu{}_\nu \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\star^\nu = T_\mu{}^\nu \mathbf{e}_\star^\mu \otimes \mathbf{e}_\nu = T_{\mu\nu}\mathbf{e}_\star^\mu \otimes \mathbf{e}_\star^\nu} \quad (1.11)$$

Dès lors, comme à un tenseur d'ordre 1 on peut associer deux vecteurs de composantes x^μ et x_μ, à un tenseur d'ordre 2 on peut associer quatre matrices de composantes $T^{\mu\nu}$,$T^\mu{}_\nu$,$T_\mu{}^\nu$ et $T_{\mu\nu}$.

• **Changement de base** : Soit $\mathbf{e}'_\mu = \mathbf{e}_\nu M^\nu{}_\mu$ une nouvelle base de V et M la matrice de changement de base. Cette loi de transformation implique les lois de transformations pour les composantes covariantes et contravariantes. Soient $\mathbf{x}$ un vecteur et $\mathbf{T}$ un tenseur :

$$\boxed{\begin{aligned} x'_\mu &= x_\nu M^\nu{}_\mu \\ x'^\mu &= \left(M^{-1}\right)^\mu{}_\nu x^\nu \\ T'_{\mu\nu} &= \left(M^T\right)_\mu{}^\alpha T_{\alpha\beta} M^\beta{}_\nu \end{aligned}} \quad (1.12)$$

2 Le groupe de Lorentz

Les deux postulats de la relativité restreinte permettent de montrer que la structure de l'espace-temps plat est donnée par la métrique de Minkowski η,

$$\boxed{\eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \quad (2.1)$$

Avec la métrique explicite en main, on peut établir un lien concret entre les composantes covariantes et contravariantes d'un vecteur $\mathbf{x}$: $x^0 = \eta^{0\nu}x_\nu = \eta^{00}x_0 = x_0$ et $x^i = \eta^{i\nu}x_\nu = \eta^{ii}x_i = -x_i$.

$$\boxed{\begin{aligned} x^0 &= x_0 \\ x^i &= -x_i \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} (2.2) \\ (2.3) \end{aligned}$$

Nous ne supposons ici rien quant au contenu du vecteur $\mathbf{x}$, il peut s'agir du quadri-vecteur position, vitesse, énergie-impulsion, etc ... De même, sa norme sera donnée par,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{x} &= x_\mu x^\mu = x_0x^0 + x_1x^1 + x_2x^2 + x_3x^3 &(2.4)\\ &= \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = \eta_{00}x^0x^0 + \eta_{11}x^1x^1 + \eta_{22}x^2x^2 + \eta_{33}x^3x^3 &(2.5)\\ &= x^0x^0 - x^1x^1 - x^2x^2 - x^3x^3. &(2.6) \end{aligned}$$

En particulier, la norme du quadri-vecteur position est appelée *intervalle* et est notée s : $s^2 \equiv x^\mu x_\mu$. Il caractérise en quelque sorte la notion de distance dans l'espace-temps et est invariant sous tout changement de référentiel. En effet, en utilisant les équations 1.12, nous trouvons

$$\begin{aligned} s'^2 &= x'^\mu x'_\mu = x'^\mu \eta'_{\mu\nu} x'^\nu \\ &= \left(M^{-1}\right)^\mu{}_\alpha x^\alpha \left(M^T\right)_\mu{}^\lambda \eta_{\lambda\rho} M^\rho{}_\nu \left(M^{-1}\right)^\nu{}_\beta x^\beta \\ &= \left(M^{-1}\right)^\mu{}_\alpha \left(M^T\right)_\mu{}^\lambda M^\rho{}_\nu \left(M^{-1}\right)^\nu{}_\beta x^\alpha \eta_{\lambda\rho} x^\beta \\ &= \left(M^T\right)_\mu{}^\lambda \left(M^{-1}\right)^\mu{}_\alpha M^\rho{}_\nu \left(M^{-1}\right)^\nu{}_\beta x^\alpha \eta_{\lambda\rho} x^\beta \\ &= M^\lambda{}_\mu \left(M^{-1}\right)^\mu{}_\alpha M^\rho{}_\nu \left(M^{-1}\right)^\nu{}_\beta x^\alpha \eta_{\lambda\rho} x^\beta \\ &= \delta^\lambda{}_\alpha \delta^\rho{}_\beta x^\alpha \eta_{\lambda\rho} x^\beta \\ &= x^\alpha \eta_{\alpha\beta} x^\beta = x^\alpha x_\alpha \\ &= s^2 &(2.7) \end{aligned}$$

Où nous n'avons fait aucune supposition sur la métrique. Le point est que les métriques sont des tenseurs d'ordre $(0,2)$ et se transforment donc selon 1.12 : $\eta' = M^T\eta M$. Si maintenant, nous nous attardons sur le cas de la relativité restreinte, le premier postulat nous dit que la physique doit être invariante quelque soit le référentiel. En particulier, ceci signifie que les changements de bases doivent être des isométries. La métrique η' dans le nouveau référentiel doit donc être la même que dans le référentiel d'origine : $\eta' = \eta$. Les isométries qui laissent invariant l'intervalle, c-à-d, l'ensemble des matrices M telle que $M\eta M^T = \eta$ et $s'^2 = s^2$ forme un groupe appelé groupe de Lorentz et est noté $L \equiv O(3,1)$.

Le groupe de Lorentz peut être divisé en quatre composantes,

$\det(M) = +1$	$M^0{}_0 \geqslant +1$	$L_+^\uparrow$	$\mathcal{I} = \mathrm{diag}\,(1,1,1,1)$
$\det(M) = -1$	$M^0{}_0 \geqslant +1$	$L_-^\uparrow$	$P = \mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1)$
$\det(M) = -1$	$M^0{}_0 \leqslant -1$	$L_-^\downarrow$	$T = \mathrm{diag}\,(-1,1,1,1)$
$\det(M) = +1$	$M^0{}_0 \leqslant -1$	$L_+^\downarrow$	$PT = \mathrm{diag}\,(-1,-1,-1,-1)$

Dans la dernière colonne on trouve un élément type de chacune des quatre composantes. L'ensemble $L_+^\uparrow = SO(3,1)$ est un groupe et est le seul à en être un car il est le seul à contenir l'identité (le neutre). Nous retiendrons en particulier ce sous-groupe du groupe de Lorentz qui préserve à la fois l'orientation de l'espace-temps ($\det(M) = +1$) et le sens de l'écoulement du temps (${M^0}_0 \geqslant +1$).

Le groupe $L_+^\uparrow$ contient deux types de transformations, les rotations dans $\mathbb{R}^3$, notées R et les transformations spéciales de Lorentz ("*boosts*"), notées Λ. Ces dernières peuvent être paramétrisées comme suit

$$\boxed{\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta & 0 & 0 \\ -\sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \tag{2.8}$$

Où nous avons défini la direction Ox comme étant celle du *boost* et où $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\tanh\theta = \beta$ et $\beta = v/c$. Ici, la convention choisie est de définir v comme étant la vitesse du nouveau référentiel S' par rapport à l'ancien référentiel S.

3 Gradient, divergence et rotationnel

3.1 Définitions

L'opérateur *nabla* (noté ∇) est un opérateur différentiel qui peut être appliqué aussi bien à des champs scalaires f que vectoriels $\mathbf{V}$. Dans l'espace euclidien à trois dimensions, il est simplement défini comme suit :

$$\boxed{\nabla \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \end{pmatrix} \overset{\text{noté}}{=} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix}} \tag{3.1}$$

A partir de l'opérateur *nabla*, on peut construire les opérateurs gradient, divergence et rotationnel qui sont respectivement définis par,

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla f &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathbf{e}_i \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \\ \nabla \times \mathbf{V} &= \sum_{i,j,k=1}^{3} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_k}\right)\mathbf{e}_i \end{aligned}} \tag{3.2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} (\nabla f)_i &= \partial_i f \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= \partial_i V_i \\ (\nabla \times \mathbf{V})_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j V_k \end{aligned}} \tag{3.3}$$

Où ϵ_{ijk} est le symbol de Levi-Civita à trois dimensions. Il est défini comme suit,

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad (i,j,k) = (1,2,3) \quad \text{ou permutation paire} \\ -1 & \text{si} \quad (i,j,k) = (1,3,2) \quad \text{ou permutation paire} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.4}$$

nous avons les propriétés suivantes,

$$\boxed{\begin{aligned} \epsilon_{ijk}\epsilon^{klm} &= \delta_i{}^l\delta_j{}^m - \delta_i{}^m\delta_j{}^l \\ \epsilon_{ijk}\epsilon^{ijl} &= 2\delta_k{}^l \\ \epsilon_{ijk}\epsilon^{ijk} &= 6 \\ \det(M) &= \epsilon_{ijk}M_1{}^iM_2{}^jM_3{}^k \end{aligned}} \tag{3.5}$$

Lorsque l'on passe de l'espace euclidien à trois dimensions à l'espace de Minkoswki à 3+1 dimensions, on définit $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ et $\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}$. Or, nous avons vu plus haut que $x^0 = x_0 = ct$ et que $x^i = -x_i$. Nous avons donc finalement les expressions suivantes,

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_\mu &= \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \nabla \end{pmatrix} \\ \partial^\mu &= \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ -\nabla \end{pmatrix} \end{aligned}} \tag{3.6}$$

De ces deux relations, on en déduit une expression pour l'opérateur $\partial^\mu\partial_\mu$ noté parfois $\Box$ et appelé "*box*", "d'Alembertien" ou "opérateur de d'Alembert",

$$\boxed{\Box \equiv \partial^\mu\partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2} \tag{3.7}$$

3.2 Propriétés

Ces trois opérateurs étant définis à partir de la dérivée partielle, il est aisé de montrer les propriétés suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla(\lambda f + \mu g) &= \lambda\nabla f + \mu\nabla g \\ \nabla(fg) &= f\nabla g + (\nabla f)\, g \\ \nabla f = \mathbf{0} &\Leftrightarrow f = c^{ste} \\ \nabla(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) &= \mathbf{y} \;\left(\mathbf{y} = c^{ste}\right) \end{aligned}} \tag{3.8}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_i(\lambda f + \mu g) &= \lambda\partial_i f + \mu\partial_i g \\ \partial_i(fg) &= f\partial_i g + (\partial_i f)\, g \\ \partial_i f = 0\forall i &\Leftrightarrow f = c^{ste} \\ \partial_i(x_j y_j) &= y_i \end{aligned}} \tag{3.9}$$

3.3 Exemple

Des équations 3.3, on appréciera tout particulièrement la convention d'Einstein qui nous permet de traiter ces relations plus rapidement. Résolvons, par exemple, l'exercice 1.3 de la séance 4 sur l'électrostatique.

$$
\begin{aligned}
\left[\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\right]_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j \left[\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right]_k \\
&= \epsilon_{ijk}\partial_j \left(\epsilon_{klm} a_l b_m\right) \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} \left(\partial_j a_l b_m + a_l \partial_j b_m\right) \\
&= \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right)\left(\partial_j a_l b_m + a_l \partial_j b_m\right) \\
&= \delta_{il}\delta_{jm}\partial_j a_l b_m + \delta_{il}\delta_{jm} a_l \partial_j b_m - \delta_{im}\delta_{jl}\partial_j a_l b_m - \delta_{im}\delta_{jl} a_l \partial_j b_m \\
&= \partial_j a_i b_j + a_i \partial_j b_j - \partial_j a_j b_i - a_j \partial_j b_i \\
&= (\mathbf{b} \cdot \nabla)\, a_i + a_i (\nabla \cdot \mathbf{b}) - (\nabla \cdot \mathbf{a})\, b_i - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\, b_i \\
&= \left[(\mathbf{b} \cdot \nabla)\, \mathbf{a} + \mathbf{a}\,(\nabla \cdot \mathbf{b}) - (\nabla \cdot \mathbf{a})\, \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\, \mathbf{b}\right]_i
\end{aligned}
$$