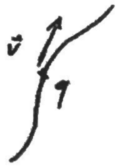
QII : Relativité et électromagnétisme

I. Magnétostatique dans la matière :



$$\partial_t \vec{p} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} \qquad \text{(Force de Lorentz)}$$

↳ impulsion relativiste

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0\mu_0\, \partial_t \vec{E} \qquad \text{(Maxwell - Ampere)}$$

$[J]$ = ampère par mètre au carré : $A.m^{-2}$

équivalence avec un fluide : $\vec{J}(\vec{x},t) \longleftrightarrow \vec{v}(\vec{x},t)$

$[\vec{J}\cdot d\vec{S}]$ = ampère : A

$\vec{J}$: densité surfacique de courant, souvent appelée simplement courant.

$\vec{j}$: densité linéique de courant.

$[\vec{j}\cdot\vec{n}\, dl]$ = ampère : A

$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$ sachant que $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ $\quad \vec{A}$: potentiel vecteur

$\left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \mu_0\vec{J}\\ \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \Delta\vec{A} = \mu_0\vec{J}\end{array}\right\}$ réécriture mathématique

par invariance de jauge, posons $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ (jauge de Coulomb)

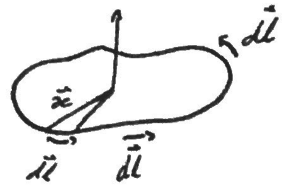
il en résulte alors $\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\, d^3x$$

Développement multipolaire du potentiel vecteur :

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{|\vec{x}|}\int d^3x'\, \vec{J}(\vec{x}') - \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\times\int d^3x' \,\frac{x'\times\vec{J}(\vec{x}')}{2} + \dots\right]$$

moment dipolaire magnétique : $\quad \vec{m} = \int d^3x' \,\dfrac{x'\times\vec{J}(\vec{x}')}{2}$

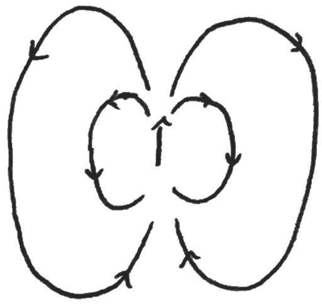


$$\vec{J}\, A\, dl = I\, \vec{dl}$$

$$\vec{m} = I \oint \underbrace{\frac{\vec{x} \times \vec{dl}}{2}}_{\vec{dS}} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{m} = I S \vec{n}$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3}}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\vec{x}\,(\vec{m}\cdot\vec{x})}{x^5} - \frac{\vec{m}}{x^3}\right]$$



⚠ : à partir de développement multipolaire, ceci est une approximation à grande distance uniquement

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\vec{x}\,(\vec{m}\cdot\vec{x})}{x^5} - \frac{\vec{m}}{x^3} + \underbrace{\frac{8\pi}{3}\vec{m}\,\delta^3(\vec{0})}_{\text{condition ?}}\right]$$

Introduisons la magnétisation $[\vec{M}] = \left[\frac{\vec{m}}{V}\right]$

$$\delta \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M}(x') \times (x - x')}{|x - x'|^3}\, \delta V$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int \frac{\vec{M}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|x - x'|^3}\, d^3x' + \int \frac{\vec{J}_{ext}(\vec{x}')}{|x - x'|}\, d^3x'\right]$$

$$\vec{A}_{lien} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \, \frac{\vec{M}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|x - x'|^3}$$

notons que $\dfrac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \vec{\nabla}_{x'} \dfrac{1}{|x - x'|}$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \, \frac{\vec{\nabla}_{x'} \times \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad + \text{ termes au bord}$$

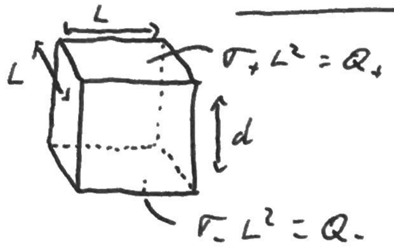
$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}_{ext}(\vec{x}') + \vec{J}_M(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\, d^3x \qquad \text{avec } \vec{J}_M(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{x})$$

04/02

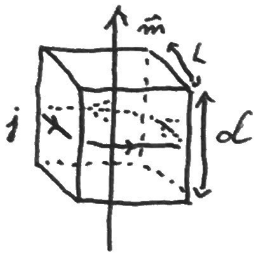
$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \, \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \, \frac{\vec{M}(\vec{x}) \times (\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

notons que $\dfrac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} = \vec{\nabla}_{x'} \dfrac{1}{|x-x'|}$

alors : $\underline{\overline{\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}}}$



$$\begin{cases} P = d\,\sigma L^2 \\ \mathcal{P} = \dfrac{p}{V} = \sigma \end{cases}$$

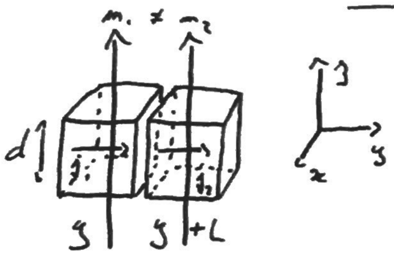


$I = jd$ et $m = IL^2$

$= jdL^2$

$\dfrac{m}{dL^2} = j = M$

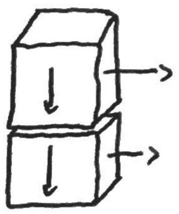
Donc $\underline{\overline{\mathcal{P} = \dfrac{p}{V} = \sigma}}$ $\underline{\overline{M = \dfrac{m}{V} = j}}$



$I_x = j_2 d - j_1 d$

$J_x = \dfrac{I_x}{dL} = \dfrac{j_2 - j_1}{L} = \dfrac{M_2 - M_1}{L}$

$= \dfrac{M_z(y+L) - M_z(y)}{L} = \partial_y M_z$ (1)



$\Rightarrow J_x = -\partial_z M_y$ (2)

Avec (1) et (2) : $J_x = \underline{\partial_y M_z - \partial_z M_y}$

Nous retrouvons $\underline{\overline{\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}}}$

Reprenons l'expression du potentiel vecteur :

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \, \frac{\vec{J}(\vec{x})}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \underbrace{\left(\vec{M} \times \vec{\nabla}_{x'} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)}_{(1)}$$

$$(1)_i = \varepsilon_{ijk} \, M_j \, \partial'_k \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$$= \partial'_k \underbrace{\left(\varepsilon_{ijk} \frac{M_j}{|x - x'|}\right)}_{(V_k)_i} + \frac{\varepsilon_{ijk} \, \partial'_j M_k}{|x - x'|}$$

Pas écrit

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J}_{ext} + \vec{J}_M\right)$$

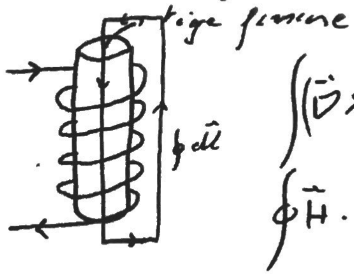
$$= \mu_0 \vec{J}_{ext} + \mu_0 (\vec{\nabla} \times \vec{M})$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}\right) = \vec{J}_{ext}$$

$$\underline{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{ext}}$$ en posant $H := \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$ $\quad [\vec{H}] = A.m^{-1}$

Rappelons $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$, inchangé

Champ magnétique dans un solénoïde :



$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int \vec{J}_{ext} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$$ avec N, le nombre de spires

$$HL = NI$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_{ext} - \vec{\nabla}\cdot\vec{P}\right)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\underbrace{\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right)}_{:=\vec{D}} = \rho_{ext} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{ext}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0} \quad \text{, inchangé}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \qquad \text{, si linéaire et isotrope}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E}$$

$$= \varepsilon\vec{E} \qquad \text{avec } \varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi_e)$$

Prenons : $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$, si linéaire et isotrope

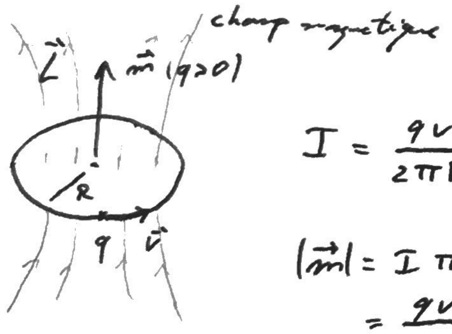
$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right)$$

$$= \mu_0(1+\chi_m)\vec{H}$$

$$= \mu\vec{H} \qquad \text{avec } \mu = \mu_0(1+\chi_m)$$

Susceptibilité magnétique : $\chi_m > 0$ paramagnétique

$\chi_m < 0$ diamagnétique



$$I = \frac{qv}{2\pi R} = \frac{q}{T}$$

$$|\vec{m}| = I\pi R^2$$

$$= \frac{qvRm}{2m} = \frac{qL}{2m} \qquad \text{avec } L \text{, moment angulaire}$$

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} \qquad \text{Donc : } \boxed{\vec{m} = \frac{q}{2m}\vec{L}}$$

$$\phi = \int \vec{B}\cdot d\vec{S} = B\pi R^2$$

$$\partial_t\phi \neq 0 \quad ; \quad \int(\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{S} = -\int \partial_t\vec{B}\cdot d\vec{S} = -\partial_t\phi$$

$$\Leftrightarrow \int \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\pi R^2\,\partial_t B$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{R}{2}\partial_t B$$

$$\Rightarrow \partial_t v = \frac{q}{m} E = \frac{qR}{2m} \partial_t B$$

$$\delta v = \left| \frac{qR}{2m} \delta B \right|$$

$\delta B > 0$: $q > 0 \rightarrow \delta v < 0$

$q < 0 \rightarrow \delta v > 0$

$U_m = -\vec{m} \cdot \vec{B}$, U_m, énergie magnétique

$\rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} U_m = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})$

Cas où le rayon varie :

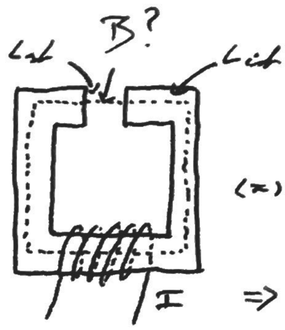
$$F = m \frac{v^2}{R} \quad ; \quad \delta F = 2 m v \frac{\delta v}{R} = 2 m \frac{v}{R} q \frac{R}{2m} \delta B \qquad (1)$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \qquad \text{(Force de Lorentz)}$$

$$\delta F_B = q v \delta B \qquad (2)$$

(1) et (2) se compensent, $\delta F_T = 0$

10/02



$$\int d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \int d\vec{S} \cdot \vec{J}_{ext}$$

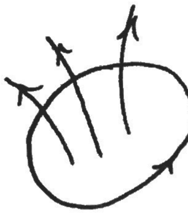
$$(*) \qquad \int d\vec{l} \cdot \vec{H} = nI$$

$$\Rightarrow H_{ext} L_{ext} + H_{int} L_{int} = nI$$

or $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ et donc $\vec{n} \cdot (\vec{B}_{ext} - \vec{B}_{int}) = 0$

Rappelons aussi que $\vec{B}_{ext} = \mu_0 \vec{H}_{ext}$

On trouve alors : $\frac{B_{int}}{\mu_0} L_{ext} + H_{int} L_{int} = nI$



$I = J\, d\sigma$

$$\begin{aligned}
\delta W &= I\,\delta\phi \\
&= \vec{J}\cdot d\vec{\sigma} \int \delta\vec{B}\cdot d\vec{S} \\
&= \vec{J}\cdot d\vec{\sigma} \int (\vec{\nabla}\times\delta\vec{A})\cdot d\vec{S} \\
&= \vec{J}\cdot d\vec{\sigma} \oint \delta\vec{A}\cdot d\vec{l} \\
&= \int_{Fil} \vec{J}\cdot\delta\vec{A}\, dV
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } \delta W_M &= \int \vec{J}_{ext}\cdot\delta\vec{A}\, dV \\
&= \int (\vec{\nabla}\times\vec{H})\cdot\delta\vec{A}\, dV = \\
&= \int \varepsilon_{ijk}\left[\partial_j(H_k\,\delta A_i) - H_k\,\partial_j\,\delta A_i\right] dV \\
&= \int \vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\delta\vec{A})\, dV = \int \vec{H}\cdot\delta\vec{B}\, dV
\end{aligned}$$

et pour un milieu linéaire $\delta W_M = \delta\left(\frac{1}{2}\int \vec{H}\cdot\vec{B}\, dV\right)$

$$\boxed{W_M = \frac{1}{2}\int dV\, \vec{H}\cdot\vec{B}} \qquad \boxed{W_E = \frac{1}{2}\int dV\, \vec{D}\cdot\vec{E}}$$

(si linéaire)

Introduisons le point de vue tensoriel:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}$$

$F^{\mu\nu}$ est anti-symétrique

$$F^{\mu\nu\prime} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\,\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\, F^{\alpha\beta}$$

(Rappelons; μ indice de ligne
ν indice de colonne)

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$A^\mu = \left(\phi, c\vec{A}\right)$$

$$\partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\partial_t, \vec{\nabla}\right)$$

$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ (tenseur métrique de Minkowski)

Par définition d'une tr. de Lorentz, le tenseur métrique est invariant sous la transformation.