

UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES  
Faculté des Sciences  
Seconde Candidature en Sciences Physiques  
Phys 039

# **ELECTRODYNAMIQUE CLASSIQUE**

par

**Christiane Schomblond**

**Electrostatique  
Magnétostatique  
Electromagnétisme  
Relativité Restreinte**

Année Académique 2003-2004

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Equations de Maxwell dans le vide, sources et champs</b>	<b>8</b>
1.1	Equations de Maxwell: forme intégrale . . . . .	8
1.1.1	La loi de Gauss - Coulomb . . . . .	8
1.1.2	La loi de Faraday . . . . .	8
1.1.3	L'absence de monopôles magnétiques . . . . .	8
1.1.4	La loi d'Ampère modifiée par Maxwell . . . . .	8
1.2	Forme locale des équations de Maxwell . . . . .	9
1.2.1	Conservation locale de la charge électrique: équation de continuité . . . . .	9
1.3	Equations du second ordre pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$ . . . . .	10
1.4	Potentiels électromagnétiques . . . . .	10
1.5	Conditions aux limites pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$ . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Electrostatique</b>	<b>15</b>
2.1	Les Equations de l'électrostatique . . . . .	15
2.1.1	Les équations de l'électrostatique . . . . .	15
2.1.2	Les équations de la magnétostatique . . . . .	15
2.2	Champ électrique . . . . .	15
2.2.1	Conditions aux limites pour $\vec{E}$ . . . . .	17
2.3	Théorème de Gauss . . . . .	17
2.3.1	Loi de Gauss revisitée . . . . .	19
2.4	Potentiel électrostatique . . . . .	20
2.4.1	Potentiel coulombien . . . . .	21
2.4.2	Distributions particulières . . . . .	21
2.5	Equations de Poisson et de Laplace . . . . .	22
2.6	Développement multipolaire du potentiel . . . . .	24
2.7	Développement multipolaire de l'énergie potentielle . . . . .	26
2.8	Energie électrostatique, densité d'énergie. . . . .	27
2.8.1	Distribution de charges ponctuelles . . . . .	27
2.8.2	Energie électrostatique d'une répartition volumique de charges $\rho(\vec{x})$ . . . . .	28
2.9	Théorèmes de Green, Théorèmes d'unicité . . . . .	30
2.9.1	Théorèmes de Green . . . . .	30
2.9.2	Théorèmes d'unicité . . . . .	30
2.10	Conducteurs parfaits, condensateurs . . . . .	32

2.10.1	Conditions d'unicité . . . . .	32
2.10.2	Capacités, coefficients d'induction . . . . .	34
2.11	Tensions Electrostatiques [2, 3] . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Problèmes aux limites en électrostatique.</b>	<b>37</b>
3.1	La méthode des images . . . . .	37
3.1.1	Problème 1 . . . . .	37
3.1.2	Problème 2 . . . . .	38
3.2	Fonction de Green . . . . .	39
3.2.1	Fonction de Green de la sphère (problème extérieur) . . . . .	41
3.2.2	Solution de l'équation de Laplace (Dirichlet) . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Méthode de séparation des variables</b>	<b>42</b>
4.1	Eq. de Laplace en coordonnées cartésiennes . . . . .	42
4.1.1	Exemple . . . . .	43
4.2	Eq. de Laplace en coordonnées sphériques . . . . .	45
4.2.1	Equation et Polynômes de Legendre . . . . .	46
4.2.2	Eq. de Laplace: Solution à symétrie azimuthale . . . . .	46
4.2.3	Harmoniques sphériques . . . . .	47
4.2.4	Equation de Laplace: solution générale . . . . .	47
4.3	Problèmes à symétrie azimuthale [1] . . . . .	48
4.3.1	Exemple 1 . . . . .	48
4.3.2	Exemple 2 . . . . .	48
4.3.3	Exemple 3 . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Electrostatique des diélectriques</b>	<b>51</b>
5.1	Polarisation . . . . .	51
5.1.1	Pas de charges extérieures . . . . .	51
5.1.2	Polarisation uniforme . . . . .	53
5.1.3	Diélectrique avec charges extérieures . . . . .	55
5.2	Origine moléculaire de la polarisation . . . . .	55
5.2.1	Polarisation moléculaire . . . . .	55
5.2.2	Dipôles permanents . . . . .	56
5.2.3	Matériaux ferro-électriques . . . . .	56
5.2.4	Autres . . . . .	56
5.3	Relation entre $\vec{P}$ et $\vec{E}$ . . . . .	56
5.3.1	Diélectriques linéaires, homogènes et isotropes . . . . .	57
5.4	Conditions aux limites pour $\vec{D}$ et $\vec{E}$ . . . . .	57
5.5	Modèle pour la polarisabilité moléculaire . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Magnétostatique</b>	<b>60</b>
6.1	Potentiel vecteur . . . . .	61
6.2	Induction magnétique et Loi de Biot-Savart . . . . .	62
6.3	Conditions aux limites pour $\vec{B}$ . . . . .	63
6.4	Développement multipolaire du potentiel vecteur . . . . .	63
6.4.1	Exemples . . . . .	65
6.5	Force exercée par un courant sur un courant . . . . .	65

6.5.1	Force de Laplace . . . . .	65
6.5.2	Loi d'Ampère . . . . .	66
6.6	Energie magnétique . . . . .	67
6.6.1	Force et Energie potentielle . . . . .	67
6.6.2	Energie magnétique de circuits . . . . .	67
6.6.3	Energie d'une répartition volumique de courants . . . . .	69
6.6.4	Energie magnétique; densité d'énergie magnétique . . . . .	70
6.7	Tensions magnétostatiques [2] . . . . .	70
<b>7</b>	<b>Les sources du champ magnétique</b>	<b>72</b>
7.1	Classification des courants . . . . .	72
7.1.1	Courants de charges libres . . . . .	72
7.1.2	Modèle de Drude pour la conductivité . . . . .	73
7.1.3	Courants moléculaires et propriétés magnétiques de la matière . . . . .	74
7.2	Equations macroscopiques de la magnétostatique en présence de matière . . . . .	76
7.2.1	Potentiel d'aimantation . . . . .	76
7.2.2	Cas général avec courants extérieurs . . . . .	77
7.3	Aimantation uniforme . . . . .	78
7.4	Conditions aux limites pour $\vec{B}$ et $\vec{H}$ . . . . .	79
7.5	Relation entre $\vec{M}$ et $\vec{H}$ . . . . .	80
7.5.1	Matériaux dia et paramagnétiques . . . . .	80
7.5.2	Substances ferromagnétiques . . . . .	80
7.6	Potentiel pseudo-scalaire magnétique . . . . .	81
7.7	Energie magnétique et tensions magnétostatiques dans des milieux linéaires, homogènes et isotropes . . . . .	82
<b>8</b>	<b>Electromagnétisme</b>	<b>83</b>
8.1	Equations de Maxwell dans le vide . . . . .	83
8.2	Equations de Maxwell dans la matière . . . . .	83
8.3	Les potentiels électromagnétiques . . . . .	84
8.4	Potentiels retardés, potentiels avancés . . . . .	85
8.4.1	Fonctions de Green retardée et avancée . . . . .	85
8.4.2	Potentiels retardés, potentiels avancés . . . . .	87
8.5	Champs retardés et champs avancés . . . . .	88
8.6	Champs de rayonnement . . . . .	88
8.7	Tenseur des tensions électromagnétiques dans le vide: bilan d'impulsion . . . . .	90
8.8	Bilan d'énergie: Théorème de Poynting . . . . .	92
8.9	Moment cinétique . . . . .	94
<b>9</b>	<b>Rayonnement électromagnétique</b>	<b>95</b>
9.1	Rayonnement émis par des sources oscillantes localisées . . . . .	95
9.2	Rayonnement dipolaire électrique . . . . .	96
9.3	Exemple: Antenne linéaire . . . . .	98

<b>10 Ondes électromagnétiques planes</b>	<b>100</b>
10.1 Ondes planes . . . . .	100
10.2 Ondes planes monochromatiques . . . . .	101
10.3 Transformée de Fourier . . . . .	103
10.4 Polarisation . . . . .	105
10.4.1 Polarisation rectilignes . . . . .	105
10.4.2 Polarisation circulaires . . . . .	105
10.4.3 Polarisation elliptiques . . . . .	106
10.5 Réflexion et transmission d'ondes mono- chromatiques planes entre deux diélectriques . . . . .	106
10.5.1 Lois de la Réflexion et de la Réfraction . . . . .	107
10.5.2 Amplitudes des ondes réfléchi et transmise Equations de Fresnel . . . . .	108
10.6 Absorption . . . . .	111
10.6.1 Ondes électromagnétiques dans un conducteur [3] . . . . .	111
10.6.2 Réflexion à la surface d'un conducteur . . . . .	113
10.6.3 Pression de radiation [2] . . . . .	114
10.7 Dispersion . . . . .	115
10.7.1 Un modèle simple pour $\epsilon(\omega)$ . . . . .	115
10.7.2 Conductivité $\sigma(\omega)$ . . . . .	117
10.7.3 Milieu diélectrique et conducteur . . . . .	117
10.7.4 Causalité dans la relation entre $\bar{D}$ et $\bar{E}$ . . . . .	118
<b>11 Guides d'ondes</b>	<b>119</b>
11.1 Champs à la surface et à l'intérieur d'un conducteur: effet de peau. . . . .	119
11.2 Guides d'ondes . . . . .	122
11.2.1 Conditions limites pour $E_z$ et $B_z$ . . . . .	124
11.2.2 Valeurs propres du Laplacien transverse . . . . .	124
11.2.3 Ondes TEM . . . . .	125
11.2.4 Propagation d'ondes TE, TM dans un Guide . . . . .	126
11.3 Exemple: GO de section rectangulaire . . . . .	127
11.3.1 Propagation de l'énergie . . . . .	129
11.4 Cavité résonante . . . . .	130
<b>12 Relativité Restreinte</b>	<b>132</b>
12.1 Principe de relativité . . . . .	132
12.1.1 Relativité euclidienne . . . . .	132
12.1.2 Relativité Galiléenne . . . . .	133
12.1.3 Groupe simple de Galilée Composition galiléenne des vitesses . . . . .	134
12.1.4 Etat de la question avant Einstein . . . . .	135
12.2 Relativité Restreinte . . . . .	135
12.2.1 Groupe de la relativité restreinte . . . . .	135
12.2.2 Loi de composition des vitesses . . . . .	137
12.2.3 Expérience de FIZEAU . . . . .	138
12.2.4 Groupe simple de LORENTZ . . . . .	138

12.2.5	Dilatation des temps . . . . .	138
12.2.6	Contraction des longueurs . . . . .	139
12.3	Espace-temps de MINKOWSKI à 1+1 dimensions . . . . .	139
12.3.1	Vecteurs, Produit scalaire minkowskien . . . . .	140
12.3.2	Changements de base, groupe de Lorentz $L(2)$ . . . . .	141
12.3.3	Groupe de POINCARÉ $P(2)$ . . . . .	143
12.4	Groupe de Lorentz $L(4)$ , Espace-temps de Minkowski à 1 + 3 dimensions . . . . .	144
12.5	Transformations de Lorentz infinitésimales . . . . .	146
12.5.1	Algèbre de Lie $so(1,3)$ . . . . .	147
<b>13</b>	<b>Tenseurs de l'espace-temps de Minkowski</b>	<b>149</b>
13.1	Tenseurs de l'espace affín réel . . . . .	149
13.2	Introduction d'une métrique . . . . .	153
13.3	Tenseurs de l'espace-temps de Minkowski . . . . .	154
<b>14</b>	<b>Electromagnétisme dans l'espace-temps de Minkowski</b>	<b>156</b>
14.1	Le vecteur densité-courant . . . . .	156
14.2	Tenseur champ électrique-induction magnétique . . . . .	157
14.3	Tenseur déplacement électrique-champ magnétique . . . . .	158
14.4	Le vecteur potentiel électromagnétique . . . . .	159
14.4.1	Charge en mouvement rectiligne uniforme . . . . .	159
14.4.2	Equations du potentiel électromagnétique . . . . .	160
14.5	Le vecteur fréquence-nombre d'ondes . . . . .	160
14.5.1	Application: l'effet Doppler . . . . .	161
14.5.2	Application: aberration des étoiles fixes . . . . .	162
14.6	Le vecteur puissance-force de Lorentz . . . . .	163
14.7	Les tenseurs bilinéaires en $F_{\mu\nu}$ et $H_{\mu\nu}$ . . . . .	163
14.8	Le tenseur densité d'énergie-impulsion é.m. . . . .	164
14.8.1	Le bilan d'énergie-impulsion . . . . .	164
<b>15</b>	<b>Mécanique relativiste du point matériel électrisé</b>	<b>166</b>
15.1	Le vecteur vitesse . . . . .	166
15.2	Le vecteur énergie-impulsion . . . . .	167
15.2.1	Le photon . . . . .	169
15.3	Les équations de la mécanique relativiste . . . . .	169
15.4	Trajectoire d'un électron dans un champ électrique . . . . .	170
15.5	Loi du choc des particules libres . . . . .	172
15.5.1	Désintégration du $\pi^0$ en deux photons . . . . .	172
15.5.2	La formule d'Einstein $E = mc^2$ . . . . .	172
15.5.3	L'effet Compton ou $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$ . . . . .	173
<b>16</b>	<b>Rayonnement émis par des charges accélérées</b>	<b>174</b>
16.1	Potentiels retardés et avancés: Fonctions de Green invariantes . . . . .	174
16.2	Vecteur densité-courant d'une charge en mouvement . . . . .	175
16.3	Potentiels de Liénard-Wiechert . . . . .	176
16.4	Champ électromagnétique d'une charge mobile . . . . .	177
16.5	Puissance rayonnée par une charge accélérée . . . . .	179

16.5.1	Accélérateur linéaire . . . . .	180
16.5.2	Accélérateur circulaire . . . . .	181
<b>A</b>	<b>Quelques outils mathématiques</b>	<b>182</b>
A.1	Rappels d'algèbre linéaire . . . . .	182
A.1.1	Espace vectoriel $V$ sur $\mathbb{R}$ . . . . .	182
A.1.2	Espace dual $V^*$ . . . . .	183
A.1.3	Tenseurs . . . . .	183
A.1.4	Produit scalaire euclidien sur $V$ - Tenseur métrique . . . . .	186
A.1.5	Isomorphisme entre $V$ et $V^*$ . . . . .	186
A.1.6	Produit vectoriel dans $V = \mathbb{R}^3$ . . . . .	188
A.2	Champs de vecteurs et leurs dérivées . . . . .	189
A.2.1	Gradient d'une fonction scalaire . . . . .	189
A.2.2	Différentielle d'une fonction scalaire $f$ . . . . .	189
A.2.3	Divergence d'un champ de vecteurs . . . . .	189
A.2.4	Laplacien d'une fonction scalaire . . . . .	189
A.2.5	Rotationnel d'un champ de vecteurs . . . . .	190
A.2.6	Laplacien d'un champ de vecteurs $\bar{F}$ . . . . .	190
A.2.7	Lemmes de Poincaré . . . . .	190
A.3	Formulaire . . . . .	191
A.3.1	Coordonnées cartésiennes . . . . .	191
A.3.2	Coordonnées sphériques . . . . .	191
A.3.3	Coordonnées cylindriques . . . . .	192
A.4	Intégration des champs de vecteurs . . . . .	193
A.4.1	Élément de volume . . . . .	193
A.4.2	Élément d'aire au point P de la surface d'équation $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$ . . . . .	193
A.4.3	Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une portion de courbe d'équation $\bar{r} = \bar{r}(u)$ . . . . .	194
A.4.4	Flux d'un champ de vecteurs au travers d'une portion de sur- face . . . . .	194
A.4.5	Théorème d'Ostrogradsky ou de la divergence . . . . .	194
A.4.6	Théorème de Stokes . . . . .	195
<b>B</b>	<b>Lemmes de Poincaré</b>	<b>196</b>
B.1	Premier Lemme . . . . .	196
B.1.1	Cas particulier $n = 3$ . . . . .	196
B.2	Deuxième Lemme . . . . .	197
B.2.1	Cas particulier $n=3$ . . . . .	197
<b>C</b>	<b>Séries et intégrales de Fourier</b>	<b>199</b>
C.1	Séries de Fourier . . . . .	199
C.1.1	Série de Fourier complexe . . . . .	199
C.1.2	Exemples . . . . .	200
C.1.3	Fonction définie sur $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$ . . . . .	200
C.1.4	Série de Fourier d'une fonction de $N$ variables . . . . .	201
C.2	Intégrales de Fourier . . . . .	201

C.2.1	Exemples . . . . .	201
C.2.2	Généralisation aux fonctions de $N$ variables. . . . .	202
C.2.3	Exercices . . . . .	202
<b>D</b>	<b>Eléments de la théorie des distributions</b>	<b>205</b>
D.1	Distributions de SCHWARTZ [5] . . . . .	205
D.1.1	Exemples . . . . .	205
D.1.2	Convergence dans $\mathcal{D}'$ . . . . .	206
D.1.3	Propriétés locales des distributions. . . . .	207
D.1.4	Opérations sur les distributions. . . . .	208
D.1.5	Multiplication des distributions. . . . .	210
D.1.6	Convolution de distributions . . . . .	212
D.2	Distributions Tempérées . . . . .	213
D.2.1	Définitions. . . . .	213
D.2.2	Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$ . . . . .	214
D.2.3	Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$ . . . . .	214
D.2.4	Transformation de Fourier dans $L^2$ . . . . .	216
<b>E</b>	<b>Polynômes de Legendre</b>	<b>217</b>
E.1	Fonction génératrice. . . . .	217
E.2	Formule de récurrence. . . . .	217
E.3	Equation différentielle. . . . .	218
E.4	Formule de Rodrigues . . . . .	220
E.5	Orthogonalité . . . . .	220
E.6	Complétude . . . . .	221
E.7	Problème aux valeurs propres . . . . .	221
E.8	Résolution de l'équation de Laplace. . . . .	223
<b>F</b>	<b>Fonctions de Laplace ou Harmoniques sphériques</b>	<b>225</b>
F.1	Définitions . . . . .	225
F.2	Equations différentielles. . . . .	225
F.3	Résolution de l'équation de Laplace . . . . .	227
F.4	Théorème d'addition . . . . .	228
<b>G</b>	<b>Problème d'équilibre</b>	<b>229</b>
G.1	Equilibre électrostatique . . . . .	229
<b>H</b>	<b>Fonction de Green retardée</b>	<b>232</b>
<b>I</b>	<b>Conditions aux limites</b>	<b>234</b>
I.1	Rappels . . . . .	234
I.2	Champs monochromatiques en $e^{-i\omega t}$ . . . . .	234
I.3	Cas particuliers . . . . .	235
<b>J</b>	<b>Définition alternative des transformations de Lorentz</b>	<b>237</b>



# Chapitre 1

## Equations de Maxwell dans le vide, sources et champs

### 1.1 Equations de Maxwell: forme intégrale

#### 1.1.1 La loi de Gauss - Coulomb

Soit  $S$  une surface fermée non chargée. Le flux du champ électrique sortant de  $S$  est proportionnel à la charge totale intérieure à  $S$ :

$$\oint_S \overline{dS} \cdot \overline{E} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{int} \quad (1.1.1)$$

#### 1.1.2 La loi de Faraday

Soit  $C$  une boucle fermée,  $\Sigma$  une surface quelconque qui s'appuie sur  $C$ : la circulation du champ électrique le long de la courbe fermée est égale, au signe près (loi de Lenz), à la dérivée temporelle du flux magnétique qui traverse la surface  $\Sigma$ .

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \overline{E} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \overline{dS} \cdot \overline{B} \quad \text{ou} \quad \mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \Phi_m. \quad (1.1.2)$$

#### 1.1.3 L'absence de monopôles magnétiques

Le flux magnétique sortant d'une surface fermée  $S$  arbitraire est nul:

$$\oint_S \overline{dS} \cdot \overline{B} = 0 \quad (1.1.3)$$

#### 1.1.4 La loi d'Ampère modifiée par Maxwell

Soit  $C$  une boucle fermée,  $\Sigma$  une surface quelconque qui s'appuie sur  $C$ ,

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \overline{B} = \mu_0 \int_{\Sigma} \overline{dS} \cdot \overline{j} + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \overline{dS} \cdot \overline{E}. \quad (1.1.4)$$

$c$  désigne la vitesse de la lumière:

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}. \quad (1.1.5)$$

L'introduction du courant de déplacement  $\partial_t(\epsilon_0 \bar{E})$ , non exigée à l'époque par une quelconque nécessité expérimentale, est un trait du génie de Maxwell.

## 1.2 Forme locale des équations de Maxwell

La forme locale des équations de Maxwell s'obtient en appliquant les théorèmes d'Ostrogradsky et Stokes à (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) et (1.1.4), puis en laissant le volume  $V$  limité par  $S$  (respectivement la surface  $\Sigma$  limitée par la boucle  $C$ ) devenir infinitésimalement petit. Nous supposons que les charges et les courants sont décrits par leurs distributions volumiques  $\rho(\bar{x}, t)$  et  $\bar{j}(\bar{x}, t)$  (ces distributions peuvent éventuellement avoir des singularités sur des surfaces, des lignes ou en certains points). La loi de Gauss, par exemple, (1.1.1) se transforme par le théorème d'Ostrogradsky en

$$\int_V dv \bar{\nabla} \cdot \bar{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dv \rho. \quad (1.2.6)$$

On en déduit la forme locale pour  $V$ , arbitraire, infiniment petit,

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.2.7)$$

De la même façon, on obtient les autres équations

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\partial_t \bar{B} \quad (1.2.8)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0 \quad (1.2.9)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 [\epsilon_0 \partial_t \bar{E} + \bar{j}]. \quad (1.2.10)$$

Ce sont des équations aux dérivées partielles du premier ordre qui couplent les champs  $\bar{E}$  et  $\bar{B}$ .

Remarque: en l'absence de sources, ces équations restent inchangées si l'on remplace  $\bar{E}$  par  $-c \bar{B}$  et  $\bar{B}$  par  $\frac{1}{c} \bar{E}$ : c'est la dualité électrique-magnétique<sup>1</sup>. Cette invariance peut être étendue aux équations avec sources, à la condition d'admettre l'existence de monopôles magnétiques. Une telle hypothèse a été introduite par P.A.M. DIRAC [1]: elle peut fournir une explication au fait avéré que toute particule élémentaire porte une charge électrique qui est un multiple entier de la charge de l'électron.

### 1.2.1 Conservation locale de la charge électrique: équation de continuité

En prenant la dérivée par rapport au temps de l'équation (1.2.7) et la divergence de (1.2.10), on obtient la loi locale de conservation de la charge électrique

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \bar{j} = 0. \quad (1.2.11)$$

Intégrée sur un volume  $V$ , elle exprime que

$$\frac{d}{dt} \int_V dv \rho = - \int_V dv \bar{\nabla} \cdot \bar{j} = - \oint_S \bar{dS} \cdot \bar{j} = \oint_S (-\bar{dS}) \cdot \bar{j} \quad (1.2.12)$$

---

1. En fait, les équ. restent inchangées pour  $\bar{E} \rightarrow \cos \alpha \bar{E} - \sin \alpha c \bar{B}$  et  $\bar{B} \rightarrow \sin \alpha \frac{\bar{E}}{c} + \cos \alpha \bar{B}$

la variation, au cours du temps, de la charge électrique contenue dans  $V$  est due au flux du courant qui traverse la surface  $S$ . Sur le plan mathématique, c'est la condition d'intégrabilité des équations de Maxwell.

Noter que, sans le courant de déplacement, la loi de conservation serait toujours celle des courants permanents  $\bar{\nabla} \cdot \bar{j} = 0$ .

### 1.3 Equations du second ordre pour $\bar{E}$ et $\bar{B}$

En prenant le rotationnel des deux membres de l'équation (1.2.8), et en utilisant les équations de Maxwell, il vient

$$\begin{aligned}\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{E}) &= \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{E}) - \Delta \bar{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \bar{\nabla} \rho - \Delta \bar{E} \\ &= -\bar{\nabla} \times \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\nabla} \times \bar{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \mu_0 \bar{j} \right].\end{aligned}\quad (1.3.13)$$

Ceci équivaut à l'équation

$$\left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right] \bar{E} = \square \bar{E} = -\mu_0 \left[ c^2 \bar{\nabla} \rho + \frac{\partial \bar{j}}{\partial t} \right].\quad (1.3.14)$$

En faisant subir le même sort à l'équation (1.2.10), il vient

$$\left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right] \bar{B} = \square \bar{B} = \mu_0 (\bar{\nabla} \times \bar{j}).\quad (1.3.15)$$

Les équations (1.3.14) et (1.3.15) sont maintenant des équations séparées pour le champ électrique et le champ magnétique, mais ce sont des équations aux dérivées partielles du second ordre: celles-ci admettent davantage de solutions que les équations du premier ordre.

En l'absence de sources (pour  $\rho = 0$  et  $\bar{j} = 0$ ), les champs obéissent à des équations d'ondes; on entrevoit donc que les équations de Maxwell vont admettre des solutions ondulatoires et que ces ondes vont se propager à la vitesse de la lumière (cfr. la découverte par Maxwell de la nature électromagnétique de la lumière; confirmée par les expériences de Hertz).

### 1.4 Potentiels électromagnétiques

Lorsque les sources sont localisées dans l'espace, en application du Lemme de Poincaré, l'équation (1.2.9) admet pour solution

$$\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}.\quad (1.4.16)$$

$\bar{A}(\vec{x}, t)$  est appelé *potentiel magnétique ou potentiel vecteur*. Noter qu'il n'est pas totalement défini par (1.4.16): en effet, puisque le rotationnel d'un gradient est nul, les potentiels  $\bar{A}$  et

$$\bar{A}' = \bar{A} + \bar{\nabla} f\quad (1.4.17)$$

fournissent le même  $\bar{B}$ :

$$\bar{B}[\bar{A}'] = \bar{B}[\bar{A}].\quad (1.4.18)$$

Si l'on injecte  $\bar{B} = \bar{B}[\bar{A}]$  dans l'équation  $\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0$ , celle-ci se réduit à une identité puisque  $\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{A})$  est identiquement nulle.

En portant (1.4.16) dans l'équation (1.2.8), on en tire que

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\nabla} \times \bar{A}) \quad (1.4.19)$$

ou encore que

$$\bar{\nabla} \times (\bar{E} + \partial_t \bar{A}) = 0. \quad (1.4.20)$$

Par le Lemme de Poincaré, on en conclut que

$$\bar{E} + \partial_t \bar{A} = -\bar{\nabla} \phi. \quad (1.4.21)$$

$\phi(\bar{x}, t)$  est appelé *potentiel électrique ou potentiel scalaire*. L'équation (1.4.21) exprime donc le champ électrique en fonction des potentiels

$$\bar{E}[\bar{A}, \phi] = -\bar{\nabla} \phi - \partial_t \bar{A}. \quad (1.4.22)$$

En remplaçant dans l'équation (1.2.8) le champ électrique par son expression  $\bar{E}[\bar{A}, \phi]$ , celle-ci se réduit donc aussi à une identité. Par la transformation (1.4.17) qui laisse invariant le champ magnétique, le champ électrique devient

$$\bar{E}[\bar{A}', \phi] = \bar{E}[\bar{A}, \phi] - \partial_t \bar{\nabla} f = \bar{E}[\bar{A}, \phi] - \bar{\nabla} \partial_t f, \quad (1.4.23)$$

mais si, en plus, on remplace  $\phi$  par  $\phi'$  défini par

$$\phi' = \phi - \partial_t f, \quad (1.4.24)$$

alors

$$\bar{E}[\bar{A}', \phi'] = \bar{E}[\bar{A}, \phi]. \quad (1.4.25)$$

Il existe donc une infinité de potentiels  $(\bar{A}, \phi)$  qui fournissent les mêmes champs  $\bar{E}[\bar{A}, \phi]$  et  $\bar{B}[\bar{A}]$ : ces potentiels se déduisent l'un de l'autre par une transformation de jauge (1.4.17) et (1.4.24); ces transformations dépendent d'une fonction arbitraire  $f(\bar{x}, t)$ .

En terme des potentiels, les équations de Maxwell (1.2.8) et (1.2.9) dans lesquelles ne figurent pas les sources deviennent donc des identités, tandis que les équations avec sources prennent la forme suivante

$$\left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right] \phi - \partial_t [\bar{\nabla} \cdot \bar{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \phi] = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.4.26)$$

$$\left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right] \bar{A} + \bar{\nabla} [\bar{\nabla} \cdot \bar{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \phi] = \mu_0 \bar{j} \quad (1.4.27)$$

Ces équations, aux dérivées partielles du second ordre, mélangent les potentiels électrique et magnétique; elles se simplifient considérablement si, dans la classe des potentiels équivalents, on choisit comme représentant un couple  $(\bar{A}, \phi)$  qui satisfait la condition de jauge de Lorenz, à savoir

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \phi = 0. \quad (1.4.28)$$

Avec (1.4.28), les équations pour les potentiels deviennent des équations d'ondes inhomogènes

$$\square \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.4.29)$$

$$\square \bar{A} = \mu_0 \bar{j} \quad (1.4.30)$$

où

$$\square = \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right] \quad (1.4.31)$$

désigne l'opérateur d'Alembertien du vide.

**Remarque 1.1.** *la condition de jauge de Lorenz ne fixe pas totalement les potentiels; en effet, si  $(\bar{A}, \phi)$  satisfait la condition (1.4.28),  $(\bar{A}', \phi')$  satisfait encore la condition de Lorenz pour tout  $f$  solution de l'équation de d'Alembert:*

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{A}' + \frac{1}{c^2} \partial_t \phi' = \bar{\nabla} \cdot \bar{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \phi - \square f = -\square f = 0. \quad (1.4.32)$$

Cette équation

$$\square f = 0 \quad (1.4.33)$$

admet encore une infinité de solutions.

**Remarque 1.2.** *D'autres choix de jauge conduisent à des équations différentes pour les potentiels. Par exemple, dans la jauge de Coulomb, càd, si*

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{A} = 0, \quad (1.4.34)$$

les équations aux potentiels prennent la forme

$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.4.35)$$

$$\left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right] \bar{A} = \mu_0 \bar{j} - \bar{\nabla} \left[ \frac{1}{c^2} \partial_t \phi \right]. \quad (1.4.36)$$

## 1.5 Conditions aux limites pour $\bar{E}$ et $\bar{B}$

Les équations de Maxwell gouvernent le comportement des champs électrique et magnétique au passage d'une surface  $\Sigma$  portant des distributions surfaciques de charges et de courants. Pour mettre ceci en évidence,

1) On considère un petit cylindre à cheval sur la surface, de section  $dS$ , dont la hauteur  $dh \rightarrow 0$  et on calcule le flux du champ électrique au travers de la surface de ce cylindre

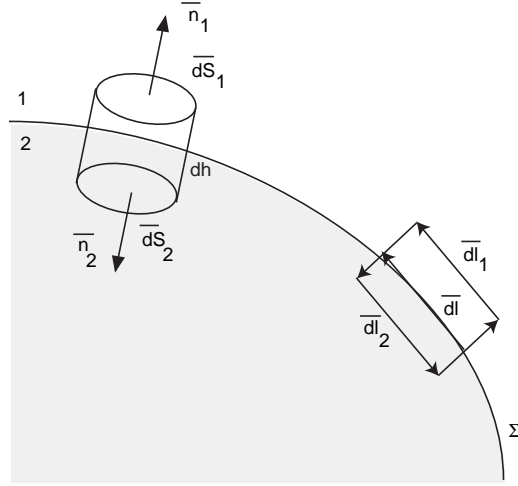
$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{S} = dS \bar{n}_1 \cdot (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) \quad (1.5.37)$$

$$= \int dv \bar{\nabla} \cdot \bar{E} \quad (1.5.38)$$

$$= \int dv \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.5.39)$$

$$= \int dS \frac{dh \rho}{\epsilon_0} \quad (1.5.40)$$

$$= \frac{\sigma}{\epsilon_0} dS \quad (1.5.41)$$



d'où on tire

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \bar{n}_1 \cdot (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) \quad (1.5.42)$$

càd la *discontinuité de la composante normale de  $\bar{E}$*  s'il existe des charges en surface. Remarque: pour passer de la distribution volumique de charge  $\rho$  à la distribution surfacique  $\sigma$ , il faut supposer que  $\rho$  est singulier sur  $\Sigma$  de sorte que,

$$\sigma = \rho dh \quad (1.5.43)$$

est finie, à la limite  $dh \rightarrow 0$ .

2) Le calcul du flux de  $\bar{B}$  au travers de la surface de ce cylindre se fait de la même façon mais il conduit à

$$0 = \bar{n}_1 \cdot (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) \quad (1.5.44)$$

qui exprime la *continuité de la composante normale de  $\bar{B}$* .

3) On considère un petit circuit rectangulaire plan perpendiculaire à  $\Sigma$  dont les côtés perpendiculaires à  $\Sigma$  sont de hauteur  $dh \rightarrow 0$  et on calcule la circulation de  $\bar{E}$  le long de ce circuit fermé

$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{r} = d\bar{\ell}_1 \cdot (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) \quad (1.5.45)$$

$$= \int_s d\bar{S} \cdot \bar{\nabla} \times \bar{E} \quad (1.5.46)$$

$$= - \int_s d\bar{S} \cdot \partial_t \bar{B} = -d\bar{S} \cdot (\partial_t \bar{B}) \quad (1.5.47)$$

la quantité  $(\bar{n} \cdot \partial_t \bar{B})$  étant supposée finie, à la limite où  $dh$  donc aussi  $dS$  tend vers zéro, le produit  $d\bar{S} \cdot (\partial_t \bar{B})$  tend vers zéro. On en tire

$$d\bar{\ell} \cdot (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = 0 \quad (1.5.48)$$

d'où aussi la *continuité des composantes tangentielles de  $\bar{E}$* . On a noté  $s$  la petite surface plane délimitée par le circuit fermé  $C$ .

4) Le calcul de la circulation de  $\bar{B}$  le long de ce circuit fermé donne

$$\oint_C \bar{B} \cdot d\bar{r} = d\bar{\ell}_1 \cdot (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) = d\bar{\ell} \cdot (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) \quad (1.5.49)$$

$$= \int_s d\bar{S} \cdot \bar{\nabla} \times \bar{B} \quad (1.5.50)$$

$$= \int_s d\bar{S} \cdot \left[ \frac{1}{c^2} \partial_t \bar{E} + \mu_0 \bar{j} \right] \quad (1.5.51)$$

$$= d\bar{S} \cdot \frac{1}{c^2} \partial_t \bar{E} + \mu_0 (\bar{n} \times d\bar{\ell}) \cdot dh \bar{j} \quad (1.5.52)$$

$$= \mu_0 (\bar{n} \times d\bar{\ell}) \cdot \bar{k} = \mu_0 (\bar{k} \times \bar{n}) \cdot d\bar{\ell} \quad (1.5.53)$$

On a supposé que  $\frac{1}{c^2} \partial_t \bar{E}$  est une quantité finie dont le produit par  $dS$  s'annule à la limite  $dS \rightarrow 0$ ; par ailleurs, pour passer de la distribution volumique de courant  $\bar{j}$  à la distribution surfacique de courant  $\bar{k}$ , on suppose qu'une composante tangentielle de  $\bar{j}$  devient singulière sur  $\Sigma$  de sorte que, avec

$$d\bar{S} = dh \bar{n} \times d\bar{\ell} \quad (1.5.54)$$

on obtienne une distribution surfacique finie à la limite  $dh \rightarrow 0$

$$\bar{k} = \bar{j} dh. \quad (1.5.55)$$

On en déduit donc que

$$d\bar{\ell} \cdot (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) = \mu_0 (\bar{k} \times \bar{n}) \cdot d\bar{\ell} \quad (1.5.56)$$

quel que soit le vecteur  $d\bar{\ell}$  tangent à  $\Sigma$ , d'où aussi la *discontinuité* des composantes tangentielles de  $\bar{B}$  s'il existe des courants en surface:

$$\bar{n} \times (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) = \mu_0 \bar{k}. \quad (1.5.57)$$

## Chapitre 2

# Electrostatique

### 2.1 Les Equations de l'électrostatique

Lorsque les distributions de charges et de courants ne varient pas dans le temps, les équations de Maxwell admettent comme solutions des champs électrique et magnétique statiques ( $\partial_t \bar{E} = 0 = \partial_t \bar{B}$ ); ceux-ci obéissent alors à des équations séparées qui sont

#### 2.1.1 Les équations de l'électrostatique

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.1.1)$$

$$\nabla \times \bar{E} = 0. \quad (2.1.2)$$

#### 2.1.2 Les équations de la magnéto-statique

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (2.1.3)$$

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{j}. \quad (2.1.4)$$

### 2.2 Champ électrique

Considérons d'abord une répartition de charges limitée à une seule charge ponctuelle  $Q$  et plaçons l'origine du système de coordonnées en  $Q$ . De la symétrie sphérique de cette distribution, il résulte que le champ électrique au point  $P$  de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  est radial (dirigé suivant  $\bar{1}_r$ ) et indépendant des angles  $(\theta, \varphi)$ :  $\bar{E}(r, \theta, \varphi) = \bar{1}_r E_r(r)$ . Le flux de ce champ électrique sortant de la sphère de rayon  $r$  centrée à l'origine vaut donc, en vertu de la loi de Gauss

$$\oint_S \bar{dS} \cdot \bar{E} = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 E_r(r) = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.2.5)$$

on en tire

$$\bar{E}(r, \theta, \varphi) = \bar{1}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (2.2.6)$$



Si la charge ponctuelle  $Q$  est placée en un point  $P'$  de coordonnées cartésiennes  $(\bar{x}' = x'^1, x'^2, x'^3)$ , le champ électrique en  $P$  de coordonnées  $(\bar{x} = x^1, x^2, x^3)$  vaut

$$\bar{E}(\bar{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\bar{x} - \bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|^3} \quad (2.2.7)$$

où

$$\frac{(\bar{x} - \bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|} = \bar{1}_{P'P} \quad (2.2.8)$$

est le vecteur de longueur unité dirigé de  $P'$  vers  $P$ .

Pour une distribution de charges formée de  $n$  charges ponctuelles  $Q_1$  en  $\bar{x}'_1$ ,  $Q_2$  en  $\bar{x}'_2, \dots$ ,  $Q_n$  en  $\bar{x}'_n$ , le champ électrique en  $\bar{x}$  est la somme vectorielle des champs produits par chacune des charges individuelles

$$\bar{E}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\bar{x} - \bar{x}'_j)}{|\bar{x} - \bar{x}'_j|^3}. \quad (2.2.9)$$

**Remarque 2.1.** Au point  $\bar{x} = \bar{x}'_k$ , où se trouve la charge  $Q_k$ ,  $\bar{E}(\bar{x})$  doit être compris comme la somme vectorielle des champs produits par toutes les autres charges  $Q_j, j \neq k$  (la contribution de la charge  $Q_k$  doit être omise! elle est infinie!).

L'élément de charge  $dq'$  en  $\bar{x}'$  produit, en  $\bar{x}$ , l'élément de champ électrique

$$d\bar{E}(\bar{x}) = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\bar{x} - \bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|^3} \quad (2.2.10)$$

et le champ, en  $\bar{x}$ , produit par tous les  $dq'$  d'une répartition continue  $Rep$  est la somme vectorielle

$$\bar{E}(\bar{x}) = \int_{Rep} \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\bar{x} - \bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|^3} \quad (2.2.11)$$

Pour une répartition continue de charges en volume, dans  $V'$ ,  $dq' = dv' \rho(\bar{x}')$  le champ devient

$$\bar{E}(\bar{x}) = \int_{V'} \frac{dv' \rho(\bar{x}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\bar{x} - \bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|^3}; \quad (2.2.12)$$

pour une répartition continue de charges en surface, sur  $\Sigma'$ ,  $dq' = dS' \sigma(\bar{x}')$ , le champ devient

$$\bar{E}(\bar{x}) = \int_{\Sigma'} \frac{dS' \sigma(\bar{x}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\bar{x} - \bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|^3}; \quad (2.2.13)$$

pour une distribution continue de charges, sur la ligne  $C'$ ,  $dq' = ds' \lambda(\bar{x}')$ , le champ devient

$$\bar{E}(\bar{x}) = \int_{C'} \frac{ds' \lambda(\bar{x}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\bar{x} - \bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|^3}; \quad (2.2.14)$$

Pour une répartition de charges formée de charges ponctuelles et de charges distribuées en ligne, en surface et en volume, le champ électrique en  $\bar{x}$  est donné par la somme des expressions ci-dessus.

**Remarque 2.2.** Si le point  $P$  où l'on calcule le champ est dans la répartition continue, l'intégrale (2.2.11) doit être vue comme la limite pour  $\alpha \rightarrow 0$  de l'intégrale étendue à la répartition  $Rep_\alpha$ , où  $Rep_\alpha$  désigne ce qui reste de la répartition quand on a enlevé la charge électrique contenue dans un élément de volume  $\alpha$  (respectivement de surface ou de ligne) contenant le point  $P$  (c'est ce qu'on appelle la valeur principale de Cauchy).

### 2.2.1 Conditions aux limites pour $\bar{E}$

Rappelons les résultats déjà obtenus au chapitre 2:

1) la composante normale du champ électrique est discontinue en passant de la région 1 à la région 2 et la discontinuité est donnée par  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ .

$$\bar{n} \cdot (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.2.15)$$

$\bar{n}$  est le vecteur unité normal à  $\Sigma$  pointant de la région 2 vers la région 1.

2) les composantes tangentielles du champ électrique sont continues en passant de la région 1 à la région 2:

$$\bar{n} \times (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = 0 \quad (2.2.16)$$

Ces résultats s'appliquent, par exemple, lorsque le milieu 1 est le vide et le milieu 2 un conducteur parfait: dans ce cas,  $\bar{E}_2 = 0$  et  $\bar{E}_1$  est orthogonal à  $\Sigma$  et la limite (où  $P$  tend vers un point de la surface en restant dans le milieu 1) de sa composante normale est égale à  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ .

## 2.3 Théorème de Gauss

Soit  $S$  la surface fermée limitant le volume  $V$ ,  $\overline{dS}$  l'élément de surface orienté vers l'extérieur. Le flux du gradient de la fonction  $|\bar{x} - \bar{x}'|^{-1}$

$$\nabla \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} = - \frac{\bar{x} - \bar{x}'}{|\bar{x} - \bar{x}'|^3} \quad (2.3.17)$$

au travers de la surface fermée  $S$  ne dépend pas de la forme de  $S$  mais uniquement de l'angle solide sous lequel  $\bar{x}'$  voit cette surface:

$$\oint_S \overline{dS} \cdot \nabla \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} = \begin{cases} -4\pi & \text{si } \bar{x}' \text{ est dans } S \\ -2\pi & \text{si } \bar{x}' \text{ est sur } S \\ 0 & \text{si } \bar{x}' \text{ est en dehors de } S \end{cases} \quad (2.3.18)$$

#### Démonstration

Pour la facilité des calculs, nous placerons l'origine des coordonnées en  $\bar{x}'$ , de sorte que  $\bar{x}' = 0$ .

1) Démontrons d'abord que le flux considéré ne dépend pas de la surface choisie. Bien que cette propriété soit tout à fait générale, nous la prouverons pour des surfaces infinitésimales.

i) Soit  $\overline{dS}$  l'élément de surface sur la sphère de rayon  $r = |\bar{x}|$  centrée à l'origine

$$\overline{dS} = \bar{1}_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (2.3.19)$$

Comme

$$\nabla \frac{1}{r} = -\bar{1}_r \frac{1}{r^2}, \quad (2.3.20)$$

son flux au travers de  $\overline{dS}$  vaut

$$\overline{dS} \cdot \nabla \frac{1}{r} = -\sin \theta d\theta d\varphi \quad (2.3.21)$$

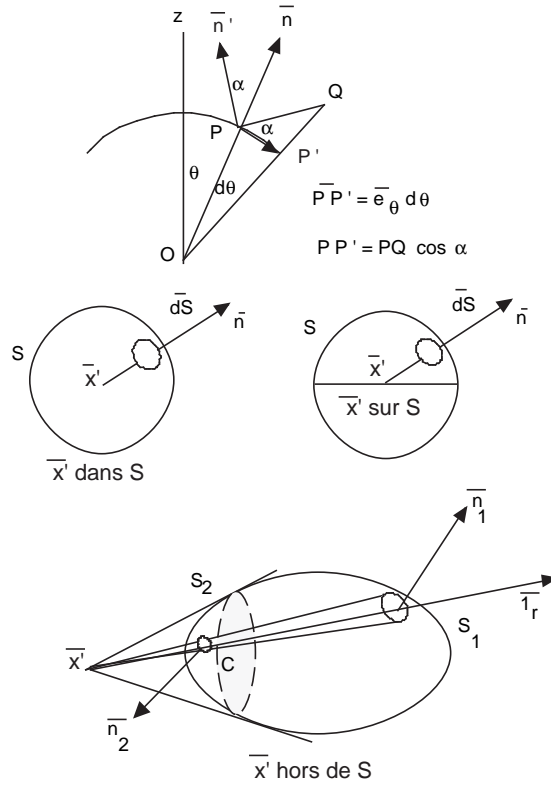


FIG. 2.1 – *Théorème de Gauss*

ii) Considérons un deuxième élément de surface  $\overline{dS'}$ , sous-tendu par le même angle solide que le précédent, mais faisant avec le premier un angle  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ . Ce deuxième élément de surface est plus grand que le premier

$$dS' = dS \frac{1}{\cos \alpha} \quad (2.3.22)$$

mais le produit scalaire de leurs vecteurs normaux respectifs vaut à présent

$$\bar{1}_r \cdot \bar{n}' = \cos \alpha \quad (2.3.23)$$

de sorte que les deux flux sont égaux

$$\overline{dS'} \cdot \bar{\nabla} \frac{1}{r} = \overline{dS} \cdot \bar{\nabla} \frac{1}{r}. \quad (2.3.24)$$

En poursuivant de la même façon, on établit le résultat annoncé.

2) Puisqu'on a le choix de la surface  $S$ , on peut calculer ce flux dans des cas simples:

i) Le flux du gradient de  $\frac{1}{r}$  sortant de la sphère de rayon  $r$  centrée en  $\bar{x}' = 0$  est égal à

$$\oint_S \overline{dS} \cdot \bar{\nabla} \frac{1}{r} = - \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \quad (2.3.25)$$

$$= - \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\varphi = - \oint d\Omega = -4\pi. \quad (2.3.26)$$

ii) Le flux du gradient de  $\frac{1}{r}$  sortant de la surface fermée  $S$  composée de la demi-sphère de rayon  $r$  centrée à l'origine et du disque de rayon  $r$  dans le plan ( $z = 0$ ) est égal à

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = -2\pi; \quad (2.3.27)$$

le flux au travers du disque est nul car, dans ce plan, les vecteurs  $\bar{I}_r$  et  $\bar{I}_z$  sont orthogonaux.

iii) Si  $\bar{x}' = 0$  est en dehors de  $S$ , le cône formé par les tangentes à  $S$  issues de  $\bar{x}'$  intersecte la surface  $S$  suivant la courbe fermée  $C$  qui décompose  $S$  en deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$ . Les flux au travers de ces deux surfaces sont égaux et puisque

$$\oint_S \bar{dS} \cdot \bar{\nabla} \frac{1}{r} = \int_{S_1} \bar{dS} \cdot \bar{\nabla} \frac{1}{r} + \int_{S_2} (-\bar{dS}) \cdot \bar{\nabla} \frac{1}{r} = 0, \quad (2.3.28)$$

on obtient bien le résultat annoncé.

### 2.3.1 Loi de Gauss revisitée

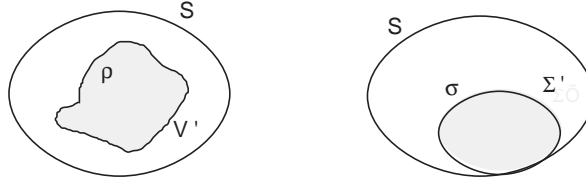


FIG. 2.2 – Loi de Gauss

Revenons un instant en arrière et appliquons ce théorème de Gauss au calcul du flux du champ électrique produit par une répartition de charges volumique au travers d'une surface fermée  $S$  entourant  $V'$ :

$$\oint_S \bar{dS} \cdot \bar{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \bar{dS} \cdot \int_{V'} dv' \rho(\bar{x}') \bar{\nabla} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \quad (2.3.29)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} dv' \rho(\bar{x}') \oint_S \bar{dS} \cdot \bar{\nabla} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \quad (2.3.30)$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V'} dv' \rho(\bar{x}') \quad (2.3.31)$$

$$= \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (2.3.32)$$

où

$$Q = \int_{V'} dv' \rho(\bar{x}') \quad (2.3.33)$$

est la charge totale intérieure à  $S$ .

Appliquons-le, à présent, au calcul du flux du champ électrique produit par une répartition de charges en surface, dans le cas où la surface chargée  $\Sigma'$  coïncide avec

une partie de  $S$ :

$$\oint_S \overline{dS} \cdot \overline{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \int_{\Sigma'} dS' \sigma(\bar{x}') \overline{\nabla} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \quad (2.3.34)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma'} dS' \sigma(\bar{x}') \oint_S \overline{\nabla} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \quad (2.3.35)$$

$$= \frac{1}{2\epsilon_0} \int_{\Sigma'} dS' \sigma(\bar{x}') \quad (2.3.36)$$

$$= \frac{Q}{2\epsilon_0}, \quad (2.3.37)$$

où

$$Q = \int_{\Sigma'} dS' \sigma(\bar{x}') \quad (2.3.38)$$

est la charge totale sur  $S$ . On peut donc compléter la loi de Gauss de la façon suivante

$$\oint_S \overline{dS} \cdot \overline{E} = \frac{1}{\epsilon_0} [\sum Q_{int} + \frac{1}{2} \sum Q_S]. \quad (2.3.39)$$

## 2.4 Potentiel électrostatique

Pour une distribution de charges localisée dans l'espace, en vertu du Lemme de Poincaré, l'équation  $(\overline{\nabla} \times \overline{E} = 0)$  admet comme solution

$$\overline{E} = -\overline{\nabla}\phi. \quad (2.4.40)$$

$\phi(\bar{x})$  est le potentiel électrique ou potentiel scalaire;  $\phi$  n'est défini qu'à une constante additive près. Son interprétation physique apparaît de la façon suivante: rappelons qu'une charge test  $Q$  placée en  $\bar{x}$  dans un champ électrique  $\overline{E}$  subit de la part de ce champ une force

$$\overline{F}(\bar{x}) = Q\overline{E}(\bar{x}); \quad (2.4.41)$$

le travail à effectuer (contre les forces du champ) pour déplacer la charge test  $Q$  du point  $A$  au point  $B$  le long de la courbe  $C$  est donné par

$$W_{A \rightarrow B} = -\int_A^B d\bar{r} \cdot \overline{F} = -Q \int_A^B d\bar{r} \cdot \overline{E} \quad (2.4.42)$$

$$= Q \int_A^B d\bar{r} \cdot \overline{\nabla}\phi = Q \int_A^B d\phi = Q[\phi(B) - \phi(A)] \quad (2.4.43)$$

et ne dépend pas du chemin suivi pour aller de  $A$  en  $B$ . Si l'on choisit la constante arbitraire de sorte que

$$\lim_{|\bar{x}| \rightarrow \infty} \phi(\bar{x}) = 0 \quad (2.4.44)$$

la grandeur  $Q\phi(\bar{x})$  est interprétée comme l'énergie potentielle de la charge test  $Q$  en  $\bar{x}$ : elle est égale au travail à effectuer pour amener la charge test  $Q$  de l'infini en  $\bar{x}$ .

**Remarque 2.3.** La condition (2.4.44) ne peut pas être satisfaite s'il y a des charges à l'infini.

### 2.4.1 Potentiel coulombien

De l'expression du champ électrique en  $\bar{x}$  produit par un élément de charge  $dq'$  en  $\bar{x}'$

$$-\frac{dq'}{4\pi\epsilon_0} \nabla \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \quad (2.4.45)$$

on déduit immédiatement que le potentiel en  $\bar{x}$  correspondant est le potentiel coulombien

$$\frac{dq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|}. \quad (2.4.46)$$

Il tend vers zéro pour  $|\bar{x}| \rightarrow \infty$  comme  $|\bar{x}|^{-1}$ . Le potentiel en  $\bar{x}$  produit par tous les éléments  $dq'$  d'une répartition continue (bornée dans  $R^3$ ) est la somme des potentiels individuels

$$\phi(\bar{x}) = \int_{Rep} \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|}. \quad (2.4.47)$$

Cette somme est plus simple que (2.2.11) car ce n'est plus une somme vectorielle.

### 2.4.2 Distributions particulières

i) le potentiel coulombien en  $\bar{x}$  d'un ensemble de charges ponctuelles  $Q_1$  en  $\bar{x}'_1, \dots, Q_n$  en  $\bar{x}'_n$  est

$$\phi(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'_j|}. \quad (2.4.48)$$

ii) le potentiel coulombien en  $\bar{x}$  d'une répartition volumique de charges dans  $V'$  est donné par

$$\phi(\bar{x}) = \int_{V'} \frac{dv' \rho(\bar{x}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|}. \quad (2.4.49)$$

iii) le potentiel coulombien en  $\bar{x}$  d'une répartition surfacique de charges sur  $\Sigma'$  est donné par

$$\phi(\bar{x}) = \int_{\Sigma'} \frac{dS' \sigma(\bar{x}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|}. \quad (2.4.50)$$

**Remarque 2.4.** Comme pour le champ électrique, le potentiel en un point  $\bar{x}$  de la répartition, se calcule en éliminant de la répartition la charge présente dans une petite région infinitésimale entourant ce point!

**Remarque 2.5.** En dehors de la répartition, le potentiel est  $C^\infty$ . Pour une répartition volumique ou surfacique de charges, le potentiel peut être choisi partout continu, car même si la composante normale du champ électrique est discontinue au passage d'une surface chargée, cette discontinuité reste bornée! On ne peut plus assurer la continuité du potentiel dans le cas des distributions ponctuelles, ni pour des distributions linéiques, ni encore pour des distributions dipolaires en surface [1].

## 2.5 Equations de Poisson et de Laplace

En injectant  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$  dans la loi de Gauss, celle-ci fournit une équation pour le potentiel: c'est *l'équation de Poisson*

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.5.51)$$

L'équation homogène correspondante

$$\Delta\phi = 0 \quad (2.5.52)$$

est *l'équation de Laplace*.

Dans ce paragraphe, nous utiliserons les coordonnées cartésiennes.

Nous avons déjà écrit une solution de l'équation de Poisson sous la forme

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{d^3x' \rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (2.5.53)$$

Pour vérifier qu'elle satisfait bien cette équation, nous devons prendre le laplacien des deux membres. Dans le membre de droite, nous tombons sur

$$\Delta \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (2.5.54)$$

Pour  $\vec{x}' \neq \vec{x}$ , ce laplacien est nul: en effet, d'abord

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -\frac{(x - x')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (2.5.55)$$

ensuite

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -\frac{1}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (2.5.56)$$

$$+ \frac{3(x - x')^2}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{5}{2}}} \quad (2.5.57)$$

donc

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 0. \quad (2.5.58)$$

Noter qu'avec  $\vec{x}'$  pris comme origine des coordonnées, le calcul est plus simple en coordonnées sphériques, car alors  $|\vec{x} - \vec{x}'| = r$  et, pour  $r \neq 0$ , on a bien

$$\Delta \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \frac{1}{r}) = 0. \quad (2.5.59)$$

Attention cependant, ce laplacien n'est pas identiquement nul! En effet, pour tout volume  $V$  (limité par  $S$ ) contenant le point  $\vec{x}'$ ,

$$\int_V d^3x \Delta \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (2.5.60)$$

$$= \oint_S d\vec{S} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -4\pi \quad (2.5.61)$$

en vertu du théorème de Gauss. En  $\bar{x} = \bar{x}'$ , le  $\Delta \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|}$  n'est plus défini en tant que fonction, mais bien en tant que *distribution*. En fait

$$\Delta \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} = -4\pi \delta^3(\bar{x} - \bar{x}') \quad (2.5.62)$$

$$= -4\pi \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \quad (2.5.63)$$

ou, au sens des distributions

$$\left(\Delta \frac{1}{r}, f(\bar{x})\right) = -4\pi f(0) = -4\pi (\delta, f) \quad (2.5.64)$$

où  $f$  désigne une fonction-test de  $\mathcal{D}$  ou  $\mathcal{S}$ .  $\delta$  est la *distribution de Dirac*; son *support* est réduit au seul point  $\bar{x} = 0$ . L'appendice D fournit quelques éléments de la théorie des distributions fort utile en théorie classique comme en théorie quantique. Nous utiliserons ici la propriété de  $\delta$  d'être le *neutre pour le produit de convolution* des distributions c'est-à-dire

$$\delta \star T = T, \quad \forall T \quad (2.5.65)$$

ou, ici

$$\int_{V'} d^3x' \rho(\bar{x}') \delta^3(\bar{x} - \bar{x}') = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \rho(\bar{x}') \delta^3(\bar{x} - \bar{x}') = \rho(\bar{x}) \quad (2.5.66)$$

la distribution  $\rho$  étant nulle en dehors de  $V'$ , l'intégrale a pu être étendue à tout l'espace. Avec ces résultats, il vient donc

$$\Delta \phi(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} d^3x' \rho(\bar{x}') \Delta \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \quad (2.5.67)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} d^3x' \rho(\bar{x}') (-4\pi) \delta^3(\bar{x} - \bar{x}') \quad (2.5.68)$$

$$= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\bar{x}). \quad (2.5.69)$$

C'est bien ce que nous voulions prouver.

Noter que la *distribution de charge* correspondant à une *charge ponctuelle*  $Q$  placée en  $\bar{x}'$  est égale à

$$\rho_{\bar{x}'}(\bar{x}) = Q \delta^3(\bar{x} - \bar{x}'). \quad (2.5.70)$$

Pour un ensemble de charges ponctuelles  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ , en  $\bar{x}'_1, \dots, \bar{x}'_N$ ,

$$\rho_{Q_1, Q_2, \dots, Q_N}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^N Q_j \delta^3(\bar{x} - \bar{x}'_j), \quad (2.5.71)$$

et en particulier pour un *dipôle électrique* en  $\bar{x}'$  constitué d'une charge ponctuelle  $Q$  en  $(\bar{x}' + \frac{1}{2}\bar{\epsilon})$  et d'une charge  $(-Q)$  en  $(\bar{x}' - \frac{1}{2}\bar{\epsilon})$ ,

$$\rho_{dip}(\bar{x}) = Q \left[ \delta^3(\bar{x} - \bar{x}' - \frac{1}{2}\bar{\epsilon}) - \delta^3(\bar{x} - \bar{x}' + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}) \right] \quad (2.5.72)$$

$$= -Q \bar{\epsilon} \cdot \bar{\nabla} \delta^3(\bar{x} - \bar{x}') = -\bar{p} \cdot \bar{\nabla} \delta^3(\bar{x} - \bar{x}'). \quad (2.5.73)$$

$$\bar{p} = Q \bar{\epsilon}.$$



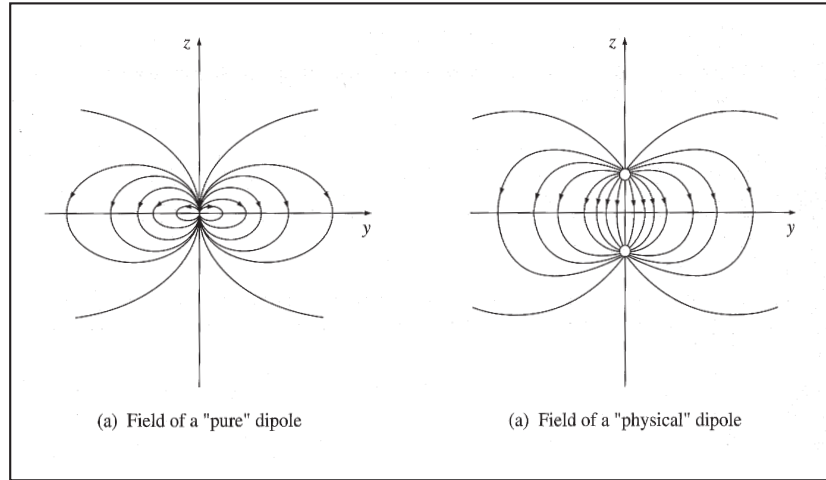


FIG. 2.3 – Dipôle

Le potentiel en  $\bar{x}$  produit par ce dipôle en  $\bar{x}'$  est égal à

$$\phi_{dip}(\bar{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}' - \frac{1}{2}\bar{\epsilon}|} - \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}' + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}|} \right] \quad (2.5.74)$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \bar{\epsilon} \cdot \nabla \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \quad (2.5.75)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \bar{p} \cdot \nabla \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{p} \cdot \bar{n}}{|\bar{x} - \bar{x}'|^2}. \quad (2.5.76)$$

$\bar{p} = Q \bar{\epsilon}$  est le moment dipolaire électrique et  $\bar{n}$  le vecteur unité  $\bar{n} = \frac{\bar{x} - \bar{x}'}{|\bar{x} - \bar{x}'|}$ . Le champ électrique en  $\bar{x}$  produit par le dipôle en  $\bar{x}'$  est égal à (exercice)

$$\bar{E}_{dip}(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\bar{n}(\bar{p} \cdot \bar{n}) - \bar{p}}{|\bar{x} - \bar{x}'|^3}. \quad (2.5.77)$$

## 2.6 Développement multipolaire du potentiel

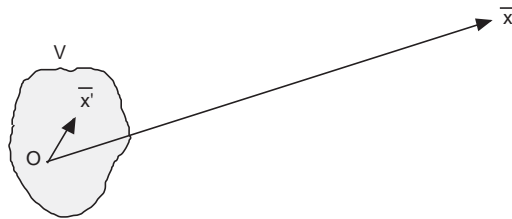


FIG. 2.4 – Développement multipolaire

Considérons, dans le cas d'une répartition volumique de charges localisées dans un volume  $V'$  borné de  $R^3$ , le potentiel en un point  $\bar{x}$  situé à grande distance de la répartition, c-à-d. pour  $|\bar{x}| \gg \gg |\bar{x}'|$ : Pour ce faire, dans l'expression de ce potentiel à  $\bar{x}$  fixé (en coordonnées cartésiennes,  $dv' = d^3x'$ ), nous remplaçons  $\frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|}$  par son

développement en série de Taylor autour de  $\bar{x}' = 0$ , c-à-d. par

$$\frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} = \frac{1}{|\bar{x}|} - \sum_{k=1}^3 x'^k \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{1}{|\bar{x}|} + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^3 x'^k x'^\ell \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^\ell} \frac{1}{|\bar{x}|} + \dots \quad (2.6.78)$$

Il vient alors

$$\phi(\bar{x}) = \int_{V'} \frac{d^3 x' \rho(\bar{x}')}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|\bar{x}|} - \sum_{k=1}^3 x'^k \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{1}{|\bar{x}|} + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^3 x'^k x'^\ell \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^\ell} \frac{1}{|\bar{x}|} + \dots \right] \quad (2.6.79)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \phi_{(j)}(\bar{x}). \quad (2.6.80)$$

Cette expression est le développement multipolaire du potentiel. Le premier terme du membre de droite de (2.6.79) est égal à

$$\phi_{(0)}(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\bar{x}|} \int_{V'} d^3 x' \rho(\bar{x}') = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\bar{x}|}. \quad (2.6.81)$$

i) Si  $Q \neq 0$ , ce terme fournit le comportement dominant du potentiel à grande distance; il correspond au potentiel d'une charge ponctuelle  $Q$  en  $\bar{x}' = 0$ .

ii) Si  $Q = 0$ , c'est le deuxième terme du membre de droite de (2.6.79) qui devient le plus important à grande distance; il correspond au potentiel d'un dipôle électrique de moment dipolaire

$$\bar{p} = \int_{V'} d^3 x' \rho(\bar{x}') \bar{x}' \quad (2.6.82)$$

situé en  $\bar{x}' = 0$ :

$$\phi_{(1)}(\bar{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \bar{p} \cdot \bar{\nabla} \frac{1}{|\bar{x}|}. \quad (2.6.83)$$

Il décroît comme  $|\bar{x}|^{-2}$  pour  $|\bar{x}| \rightarrow \infty$ . Si  $Q = 0$ , le moment dipolaire  $\bar{p}$  ne dépend pas du point par rapport auquel ce moment est calculé; en effet

$$\bar{p}' = \int_{V'} d^3 x' \rho(\bar{x}') (\bar{x}' - \bar{a}) = \bar{p} - \bar{a} Q = \bar{p}. \quad (2.6.84)$$

iii) Si  $Q$  et  $\bar{p}$  sont nuls, c'est alors le troisième terme du membre de droite de (2.6.79) qui devient dominant, il vaut

$$\phi_{(2)}(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} d^3 x' \rho(\bar{x}') \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^3 x'^k x'^\ell \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^\ell} \frac{1}{|\bar{x}|} \quad (2.6.85)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^3 D'^{k\ell} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^\ell} \frac{1}{|\bar{x}|} \quad (2.6.86)$$

et peut encore être récrit comme

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^3 D^{k\ell} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^\ell} \frac{1}{|\bar{x}|} \quad (2.6.87)$$

avec

$$D^{k\ell} = \int_{V'} d^3x' \rho(\bar{x}') [x'^k x'^\ell - \frac{1}{3} \bar{x}'^2 \delta^{k\ell}] \quad (2.6.88)$$

en utilisant les propriétés

$$\sum_{k,\ell=1}^3 \delta^{k\ell} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^\ell} \frac{1}{|\bar{x}|} = \Delta \frac{1}{|\bar{x}|} = 0 \quad (2.6.89)$$

pour  $\bar{x} \neq 0$  et

$$\sum_{\ell=1}^3 \delta^{\ell\ell} = 3; \quad \sum_{\ell=1}^3 x'^\ell x'^\ell = \bar{x}'^2. \quad (2.6.90)$$

$D^{k\ell}$  sont les composantes du moment quadrupolaire de la distribution de charges;  $D^{k\ell}$  est symétrique et de trace nulle. De plus, si  $Q = 0$  et  $\bar{p} = 0$ ,  $D^{k\ell}$  ne dépend pas du point par rapport auquel ce moment est calculé, en effet, on a

$$\int_{V'} d^3x' \rho(\bar{x}') [(x'^k - a^k)(x'^\ell - a^\ell) - \frac{1}{3}(\bar{x}' - \bar{a})^2 \delta^{k\ell}] = \quad (2.6.91)$$

$$= D^{k\ell} - [a^k p^\ell + a^\ell p^k - \frac{2}{3} \bar{a} \cdot \bar{p} \delta^{k\ell}] + Q (a^k a^\ell - \frac{1}{3} \bar{a}^2 \delta^{k\ell}). \quad (2.6.92)$$

De façon générale, on peut montrer que les multipôles d'ordre  $k$  ne dépendent pas du choix de l'origine si tous les multipôles des ordres  $j < k$  sont nuls.

## 2.7 Développement multipolaire de l'énergie potentielle

Soit  $\rho(\bar{x})$  une distribution de charge localisée,  $\bar{E}$  un champ électrique extérieur supposé lentement variable dans la région où  $\rho$  est non nulle.

L'énergie potentielle de cette distribution dans le champ extérieur vaut

$$W_p = \int d^3x \rho(\bar{x}) \phi(\bar{x}). \quad (2.7.93)$$

En choisissant l'origine des coordonnées en un point de la distribution de charge, on peut écrire

$$\phi(\bar{x}) = \phi(0) + x^k \partial_k \phi(\bar{x})|_{\bar{x}=0} + \frac{1}{2} x^k x^\ell \partial_k \partial_\ell \phi(\bar{x})|_{\bar{x}=0} + \dots \quad (2.7.94)$$

$$= \phi(0) - x^k E_k(\bar{x})|_{\bar{x}=0} - \frac{1}{2} x^k x^\ell \partial_k E_\ell(\bar{x})|_{\bar{x}=0} + \dots \quad (2.7.95)$$

$$= \phi(0) - x^k E_k(\bar{x})|_{\bar{x}=0} - \frac{1}{2} (x^k x^\ell - \frac{1}{3} \bar{x}^2 \delta^{k\ell}) \partial_k E_\ell(\bar{x})|_{\bar{x}=0} + \dots \quad (2.7.96)$$

où on a utilisé  $\bar{E} = -\bar{\nabla} \phi$  et le fait que le champ extérieur est à divergence nulle. En injectant ce développement du potentiel dans l'expression de l'énergie potentielle, on obtient son développement multipolaire sous la forme

$$W_p = \int d^3x \rho(\bar{x}) [\phi(0) - x^k E_k(\bar{x})|_{\bar{x}=0} - \frac{1}{2} (x^k x^\ell - \frac{1}{3} \bar{x}^2 \delta^{k\ell}) \partial_k E_\ell(\bar{x})|_{\bar{x}=0} + \dots] \quad (2.7.97)$$

$$= Q \phi(0) - p^k E_k(\bar{x})|_{\bar{x}=0} - \frac{1}{2} D^{k\ell} \partial_k E_\ell(\bar{x})|_{\bar{x}=0} + \dots \quad (2.7.98)$$

Les différents termes fournissent l'énergie potentielle d'un monopôle, d'un dipôle, d'un quadrupôle, ..., en  $\bar{x} = 0$ , dans un champ électrique extérieur.

Exemple: l'énergie potentielle du dipôle  $\bar{p}_1$  en  $\bar{x}$  dans le champ électrique produit par le dipôle  $\bar{p}_2$  en  $\bar{x}'$  est donnée par

$$W_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\bar{n}\cdot\bar{p}_1)(\bar{n}\cdot\bar{p}_2) - \bar{p}_1\cdot\bar{p}_2}{|\bar{x} - \bar{x}'|^3} \quad (2.7.99)$$

où  $\bar{n}$  est le vecteur unité dirigé de  $\bar{x}'$  vers  $\bar{x}$ . C'est aussi l'énergie d'interaction des deux dipôles.

## 2.8 Energie électrostatique, densité d'énergie.

Nous allons calculer ici le travail qu'il faut fournir pour créer une distribution de charges (ce travail ne dépend pas de la manière dont on crée la distribution); ce sera, par définition, l'énergie électrostatique de cette distribution.

### 2.8.1 Distribution de charges ponctuelles

Le travail  $W_1$  à fournir pour amener la première charge  $Q_1$ , de l'infini au point  $\bar{x}_1$ , dans le vide sans champ, est nul car  $Q_1$  ne subit aucune force. Le travail  $W_2$  à fournir pour amener la charge  $Q_2$  de l'infini au point  $\bar{x}_2$  dans le champ créé par  $Q_1$  vaut

$$W_2 = Q_2 \phi_1(\bar{x}_2) = Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |\bar{x}_2 - \bar{x}_1|}. \quad (2.8.100)$$

... Le travail  $W_k$  à fournir pour amener la charge  $Q_k$  de l'infini en  $\bar{x}_k$  dans le champ électrique produit par les charges  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{k-1}$  déjà en place est donné par

$$W_k = Q_k \sum_{j=1}^{k-1} \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0 |\bar{x}_k - \bar{x}_j|}. \quad (2.8.101)$$

... Le travail  $W_N$  à fournir pour amener la dernière charge  $Q_N$  de l'infini en  $\bar{x}_N$  dans le champ électrique produit par les charges  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{N-1}$  est donné par

$$W_N = Q_N \sum_{j=1}^{N-1} \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0 |\bar{x}_N - \bar{x}_j|}. \quad (2.8.102)$$

De sorte que le travail total à fournir pour créer la distribution de charges ponctuelles est égal à

$$W_e = \sum_{k=1}^N W_k = \sum_{k=1}^N \sum_{j < k} \frac{Q_k Q_j}{4\pi\epsilon_0 |\bar{x}_k - \bar{x}_j|} = \sum_{k=1}^N \sum_{j > k} \frac{Q_j Q_k}{4\pi\epsilon_0 |\bar{x}_j - \bar{x}_k|}. \quad (2.8.103)$$

On peut encore lui donner une forme plus symétrique, à savoir

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{(j \neq k)=1}^N \frac{Q_k Q_j}{4\pi\epsilon_0 |\bar{x}_k - \bar{x}_j|}. \quad (2.8.104)$$

## 2.8.2 Energie électrostatique d'une répartition volumique de charges $\rho(\vec{x})$

C'est toujours l'énergie nécessaire pour créer la distribution. Puisque l'énergie ne dépend pas de la manière dont on crée la distribution, supposons  $V$  donné et créons la distribution par couches successives dans  $V$ . Introduisons un paramètre réel  $a$  ( $0 \leq a \leq 1$ ) pour repérer les différents états intermédiaires: l'état initial correspond à  $a = 0$ ,  $\rho_0 = 0$  et  $\phi_0 = 0$ , l'état final correspond à  $a = 1$ ,  $\rho_1 = \rho$  et  $\phi_1 = \phi$ . Dans l'état intermédiaire "a", la distribution de charge est  $\rho_a(\vec{x}) = a\rho(\vec{x})$ ; elle produit le potentiel  $\phi_a(\vec{x}) = a\phi(\vec{x})$ . Le potentiel est une fonction linéaire et homogène de la distribution de charge!

Calculons d'abord l'énergie nécessaire à accroître la distribution de charge d'une quantité  $\delta\rho_a = \rho_{a+da} - \rho_a = da\rho$ . Cette énergie est égale à l'énergie potentielle de  $\delta\rho_a$  dans le champ "extérieur" produit par les charges déjà en place, de potentiel  $\phi_a$ , soit

$$dW_e = \int_V d^3x \delta\rho_a(\vec{x}) \phi_a(\vec{x}) = a da \int_V d^3x \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}) \quad (2.8.105)$$

L'énergie totale vaut donc

$$W_e = \int_0^1 a da \int_V d^3x \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}) = \frac{1}{2} \int_V d^3x \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}). \quad (2.8.106)$$

Pour une distribution volumique, l'énergie électrostatique prend donc la forme

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V d^3x \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}). \quad (2.8.107)$$

aussi équivalente à

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x \int_V d^3x' \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (2.8.108)$$

Dans l'expression (2.8.107) et la suivante, l'intégrale sur  $V$  peut être remplacée par une intégrale sur  $V' \supset V$ : cela ne change rien car la distribution  $\rho$  est de toute façon nulle en dehors du volume  $V$  supposé borné. Par contre, si nous choisissons comme volume  $V' = \mathbb{R}^3$ , connaissant le comportement à grande distance du potentiel et du champ, nous pouvons obtenir une expression simplifiée de l'énergie en terme du champ seulement.

En vertu de l'équation de Maxwell,

$$\rho(\vec{x}) = \epsilon_0 \overline{\nabla} \cdot \overline{E}(\vec{x}), \quad (2.8.109)$$

l'énergie électrostatique  $W_e$  peut se mettre sous la forme

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3x \phi(\vec{x}) \overline{\nabla} \cdot \overline{E}(\vec{x}). \quad (2.8.110)$$

En intégrant par parties, ceci devient

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3x [\overline{\nabla} \cdot (\phi \overline{E}) + \overline{E}^2] \quad (2.8.111)$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x [\overline{\nabla} \cdot (\phi \overline{E}) + \overline{E}^2] \quad (2.8.112)$$

Par le théorème d'Ostrogradsky, le premier terme du membre de droite devient

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \nabla \cdot (\phi \overline{E}) = \oint_{S_\infty} \overline{dS} \cdot (\phi \overline{E}) \quad (2.8.113)$$

où  $S_\infty$  est la sphère dont le rayon  $R$  tend vers l'infini. Comme  $dS$  est proportionnel à  $R^2$ , que  $\phi$  décroît au moins comme  $R^{-1}$  et que  $\overline{E} = -\nabla\phi$  décroît au moins comme  $R^{-2}$ , cette intégrale est nulle à la limite où  $R \rightarrow \infty$ . Il ne reste donc que

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \overline{E}^2. \quad (2.8.114)$$

Sous cette forme, on attribue l'énergie au champ électrique créé par la répartition de charges et

$$w_e = \frac{\epsilon_0}{2} \overline{E}^2 \quad (2.8.115)$$

est la *densité d'énergie électrostatique*.

**Remarque 2.6.** *L'expression (2.8.114) de l'énergie est certainement une quantité non négative, alors que l'énergie d'une distribution de charges ponctuelles peut contenir des termes positifs ou négatifs selon les signes des différentes charges. La raison de cette apparente contradiction réside dans le fait que (2.8.107) contient des contributions de "self-énergie" qui sont éliminées dans le cas des charges ponctuelles, parce qu'infinies.*

Pour mettre ceci en évidence, considérons le cas d'une répartition volumique de charges dans deux volumes disjoints  $V'_1$  et  $V'_2$ . Notons  $\rho_1$  (respectivement  $\rho_2$ ) la densité de charges dans  $V'_1$  (respectivement dans  $V'_2$ ). Notons aussi  $\phi_1$  (respectivement  $\phi_2$ ) le potentiel produit par  $\rho_1$  (respectivement par  $\rho_2$ ). L'énergie (2.8.107) devient, dans ce cas,

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V'_1 \cup V'_2} d^3x' [\rho_1(\bar{x}') + \rho_2(\bar{x}')] [\phi_1(\bar{x}') + \phi_2(\bar{x}')] \quad (2.8.116)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \int_{V'_1} d^3x' \rho_1(\bar{x}') [\phi_1(\bar{x}') + \phi_2(\bar{x}')] + \int_{V'_2} d^3x' \rho_2(\bar{x}') [\phi_1(\bar{x}') + \phi_2(\bar{x}')] \right] \quad (2.8.117)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{V'_1} d^3x' \rho_1(\bar{x}') \phi_1(\bar{x}') + \frac{1}{2} \int_{V'_2} d^3x' \rho_2(\bar{x}') \phi_2(\bar{x}') \\ + \frac{1}{2} \int_{V'_1} d^3x' \rho_1(\bar{x}') \phi_2(\bar{x}') + \frac{1}{2} \int_{V'_2} d^3x' \rho_2(\bar{x}') \phi_1(\bar{x}') \quad (2.8.118)$$

Les deux premiers termes sont clairement des contributions de self-énergie. Le 3ème,  $W_{12}$ , vaut la moitié de l'énergie potentielle de la distribution 1 dans le champ produit par la distribution 2; le 4ème,  $W_{21}$ , vaut la moitié de l'énergie potentielle de la distribution 2 dans le champ produit par la distribution 1. Ces deux termes sont égaux (théorème "de réciprocité" de Green), comme on peut le voir en explicitant les po-

tentiels en fonction des densités de charges:

$$2W_{12} = \int_{V'_1} d^3x' \rho_1(\bar{x}') \phi_2(\bar{x}') \quad (2.8.119)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'_1} d^3x' \int_{V'_2} d^3x'' \frac{\rho_1(\bar{x}')\rho_2(\bar{x}'')}{|\bar{x}' - \bar{x}''|} \quad (2.8.120)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'_2} d^3x'' \int_{V'_1} d^3x' \frac{\rho_2(\bar{x}'')\rho_1(\bar{x}')}{|\bar{x}'' - \bar{x}'|} \quad (2.8.121)$$

$$= \int_{V'_2} d^3x'' \rho_2(\bar{x}'') \phi_1(\bar{x}'') = 2W_{21}. \quad (2.8.122)$$

L'énergie d'interaction entre les deux composants de la répartition de charges est égale à l'énergie potentielle de l'un dans le champ produit par l'autre

$$W_{int} = W_{12} + W_{21} = 2W_{12} = 2W_{21}. \quad (2.8.123)$$

Lorsque les deux distributions considérées se réduisent à deux charges ponctuelles,  $W_{int}$  se ramène à l'énergie telle qu'elle a été définie pour des charges ponctuelles; la self-énergie d'une charge ponctuelle est infinie (cela n'a donc pas de sens).

## 2.9 Théorèmes de Green, Théorèmes d'unicité

### 2.9.1 Théorèmes de Green

Si  $V$  est le volume limité par la surface fermée  $S$ , si  $f$  et  $g$  sont des champs scalaires suffisamment réguliers, alors

$$\int_V d^3x [g \Delta f + \nabla g \cdot \nabla f] = \oint_S \overline{dS} \cdot g \nabla f \quad (2.9.124)$$

et

$$\int_V d^3x [g \Delta f - f \Delta g] = \oint_S \overline{dS} \cdot [g \nabla f - f \nabla g]. \quad (2.9.125)$$

La première expression découle du théorème d'Ostrogradky et de l'égalité vectorielle suivante:

$$\nabla \cdot (g \bar{h}) = \nabla g \cdot \bar{h} + g \nabla \cdot \bar{h} \quad (2.9.126)$$

appliquée à  $\bar{h} = \nabla f$ ; tandis que la seconde est la différence entre (2.9.124) et l'expression que l'on obtient en interchangeant  $f$  et  $g$  dans (2.9.124).

### 2.9.2 Théorèmes d'unicité

**Théorème 2.1.** *La solution de l'équation de Laplace dans tout l'espace  $\mathbb{R}^3$ , qui tend vers zéro (au moins) comme  $|\bar{x}|^{-1}$  pour  $|\bar{x}| \rightarrow \infty$  est  $\phi = 0$ .*

Démonstration: de (2.9.124), avec  $V = \mathbb{R}^3$  et  $S = S_\infty$ , puisque  $\Delta \phi = 0$ , on tire que

$$0 = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \phi \Delta \phi = - \int_{\mathbb{R}^3} d^3x (\nabla \phi)^2 + \oint_{S_\infty} \overline{dS} \cdot \phi \nabla \phi. \quad (2.9.127)$$

Mais, puisque  $\phi$  tend vers zéro à l'infini au moins comme  $|\bar{x}|^{-1}$ , que son gradient tend vers zéro au moins comme  $|\bar{x}|^{-2}$  et que l'élément de surface  $dS$  est proportionnel à  $|\bar{x}|^2$ , l'intégrale sur  $S_\infty$  est nulle. Il s'en suit que  $\bar{\nabla}\phi = 0$ , c-à-d.  $\phi = \text{constante}$  qui ne peut être que zéro qui est sa valeur à l'infini.

**Théorème 2.2.** *Soit  $V$  le volume limité par la surface fermée  $S$ . Si  $\phi$  est solution de l'équation de Laplace dans  $V$ , et si  $\phi$  s'annule sur la surface  $S$ , alors  $\phi$  est nulle dans tout le volume  $V$ .*

Démonstration: (2.9.124) nous donne

$$0 = \int_V d^3x \phi \Delta\phi = - \int_V d^3x (\bar{\nabla}\phi)^2 + \oint_S \bar{dS} \cdot \phi \bar{\nabla}\phi \quad (2.9.128)$$

et puisque  $\phi$  est nulle sur  $S$ , l'intégrale de surface est nulle. On en tire comme précédemment que  $\phi$  doit être constante dans  $V$ , nulle parce que nulle sur  $S$ .

**Théorème 2.3.** *Soit  $V$  le volume limité par la surface fermée  $S$ . Si  $\phi$  est solution de l'équation de Laplace dans  $V$ , et si sa dérivée normale  $\partial_n\phi = \bar{n} \cdot \bar{\nabla}\phi$  s'annule sur la surface  $S$ , alors  $\phi$  est constante dans tout le volume  $V$ .*

Démonstration: (2.9.124) nous donne

$$0 = \int_V d^3x \phi \Delta\phi = - \int_V d^3x (\bar{\nabla}\phi)^2 + \oint_S \bar{dS} \cdot \phi \bar{\nabla}\phi \quad (2.9.129)$$

$$= - \int_V d^3x (\bar{\nabla}\phi)^2 + \oint_S dS \phi \bar{n} \cdot \bar{\nabla}\phi \quad (2.9.130)$$

et puisque  $\bar{n} \cdot \bar{\nabla}\phi$  est nulle sur  $S$ , l'intégrale de surface est nulle. On en tire de nouveau que  $\phi$  doit être constante dans  $V$ , mais cette constante n'est pas fixée.

**Théorème 2.4.** *La solution de l'équation de Poisson, dans tout l'espace  $R^3$ ,*

$$\Delta\phi = - \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \rho \text{ localisée} \quad (2.9.131)$$

*qui décroît à l'infini au moins comme  $|\bar{x}|^{-1}$  est unique, c'est le potentiel coulombien.*

Démonstration: Nous avons vu précédemment que le potentiel coulombien est bien solution de l'équation de Poisson et qu'il décroît au moins comme  $|\bar{x}|^{-1}$  à l'infini.

Supposons que ce problème admette deux solutions,  $\phi_1$  et  $\phi_2$ . Alors la différence  $\phi = \phi_1 - \phi_2$  est solution de l'équation de Laplace et décroît à l'infini au moins comme  $|\bar{x}|^{-1}$ . En vertu du Théorème 1,  $\phi = 0$  donc  $\phi_1 = \phi_2$ .

**Théorème 2.5.** *La solution de l'équation de Poisson, dans le volume  $V$  limité par la surface fermée  $S$ ,*

$$\Delta\phi = - \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \rho \text{ localisée} \quad (2.9.132)$$

*qui prend sur cette surface la valeur  $\phi|_S = \psi$  (problème aux limites de Dirichlet) est unique.*

Démonstration: Soient  $\phi_1$  et  $\phi_2$  deux solutions du problème. Alors,  $\phi = \phi_1 - \phi_2$ , est la solution de l'équation de Laplace dans  $V$ , qui s'annule sur  $S$ . Elle est donc nulle dans tout  $V$  en vertu du théorème 2.

**Théorème 2.6.** *La solution de l'équation de Poisson, dans le volume  $V$  limité par la surface fermée  $S$ ,*

$$\Delta\phi = - \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \rho \text{ localisée} \quad (2.9.133)$$



dont la dérivée normale  $\partial_n \phi = \bar{n} \cdot \overline{\nabla \phi}$  prend sur cette surface des valeurs imposées  $\partial_n \phi|_S = \xi$  (problème aux limites de Neumann), est unique à une constante additive près.

Démonstration: Soient  $\phi_1$  et  $\phi_2$  deux solutions du problème. Alors,  $\phi = \phi_1 - \phi_2$ , est la solution de l'équation de Laplace dans  $V$ , dont la dérivée normale s'annule sur  $S$ . Elle est donc constante dans tout  $V$  en vertu du Théorème 3.

Remarque: on pourrait aussi envisager un problème aux limites mixte qui consisterait à se donner  $\psi$  sur une partie de  $S$  et  $\xi$  sur l'autre partie de  $S$ . Dans ce cas, la solution de l'équation de Poisson serait aussi unique, à une constante additive près.

## 2.10 Conducteurs parfaits, condensateurs

Tout élément de volume d'un conducteur parfait est électriquement neutre. Sous l'effet d'un champ extérieur, les particules porteuses de charges (essentiellement des électrons) se mettent immédiatement en mouvement et vont se répartir sur les surfaces limitrophes de telle manière que le "contre-champ" qu'elles produisent neutralise exactement le champ à l'intérieur du conducteur. Le champ électrique est donc nul à l'intérieur des conducteurs parfaits à l'équilibre électrostatique; le potentiel y est constant et les surfaces limites sont des équipotentielles; à l'extérieur, le champ électrique est normal à la surface et sa composante normale en  $P$  tend vers  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$  lorsque  $P$  tend vers un point de  $S$ .

### 2.10.1 Conditions d'unicité

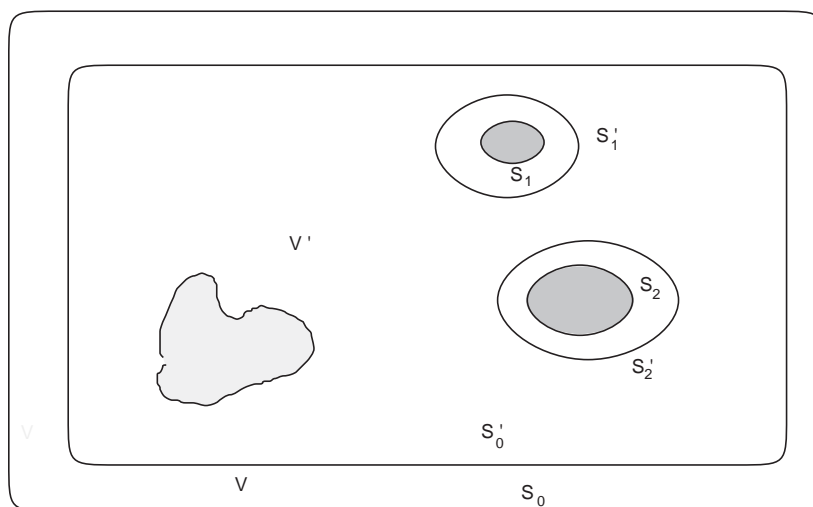


FIG. 2.5 – Conducteurs

Nous nous intéressons à la solution  $\phi$  de l'équation de Poisson dans  $V$ ,

$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.10.134)$$

dans le cas où la surface  $S$  qui limite  $V$  est formée des surfaces  $S_0, S_1, \dots, S_N$  de conducteurs parfaits (exemple: condensateur).

Pour pouvoir appliquer le théorème d'Ostrogradsky, introduisons d'abord les surfaces  $S'_0, S'_1, \dots, S'_N$  infiniment voisines de  $S_0, S_1, \dots, S_N$  et ne les touchant pas. Elles forment la frontière du volume  $V'$ . Pour toute solution éventuelle  $\phi$  de l'équation de Poisson dans  $V'$ , on a, par (2.9.124),

$$\lim_{V' \rightarrow V} \int_{V'} d^3x \phi \Delta \phi = \int_V d^3x \phi \Delta \phi \quad (2.10.135)$$

$$= - \int_V d^3x (\nabla \phi)^2 - \lim_{S' \rightarrow S} \sum_{j=0}^N \oint_{S'_j} dS \cdot \phi \partial_n \phi \quad (2.10.136)$$

$$= - \int_V d^3x (\nabla \phi)^2 - \sum_{j=0}^N \oint_{S_j} dS \phi \partial_n \phi^{(+)}. \quad (2.10.137)$$

où  $\partial_n \phi^{(+)}$  désigne la limite, en venant de l'extérieur, de la dérivée normale. Les intégrales de surface sont calculées comme des flux sortant des conducteurs donc entrant dans  $V'$ , ce qui justifie le changement de signe! Mais, sur  $S_k$ , le potentiel prend la valeur constante  $\phi_{(k)}$  et de plus,

$$\oint_{S_j} dS \partial_n \phi^{(+)} = - \oint_{S_j} dS E_n^{(+)} \quad (2.10.138)$$

$$= - \oint_{S_j} dS \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.10.139)$$

$$= - \frac{Q_j}{\epsilon_0} \quad (2.10.140)$$

où  $Q_j$  est la charge électrique totale sur la surface  $S_j$ . (2.10.137) devient donc

$$\int_V d^3x \phi \Delta \phi = - \int_V d^3x (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{j=0}^N \phi_{(j)} Q_j. \quad (2.10.141)$$

Il résulte de (2.10.141) que les données qui assurent l'unicité de la solution de l'équation de Poisson dans  $V$ , (à une constante additive près), sont soit les constantes  $\phi_{(k)}$ , potentiels sur les surfaces  $S_k$ , soit les charges  $Q_k$  portées par ces surfaces, soit les potentiels sur certaines de ces surfaces et les charges sur les autres.

Remarque:  $\phi_{(k)}$  désigne ici la valeur constante que prend le potentiel sur la surface du conducteur numéro  $k$ ; ce potentiel est produit par  $\rho$  et par les charges distribuées sur tous les conducteurs!

A noter que les charges  $Q_k$  sont liées par le théorème du flux du champ électrique appliqué à une surface fermée  $\Sigma$  qui entoure la surface  $S_0$  à l'intérieur du conducteur correspondant:

$$\epsilon_0 \oint_{\Sigma} \overline{dS} \cdot \overline{E} = 0 = \sum_{j=0}^N Q_j + Q \quad \text{où} \quad Q = \int_V d^3x \rho. \quad (2.10.142)$$

Noter aussi qu'on peut toujours choisir la constante additive pour annuler le potentiel sur l'une des surfaces; par exemple, on peut choisir  $\phi_{(0)} = 0$ . L'unicité

est donc établie par la donnée de  $N$  nombres, potentiels ou charges des conducteurs  $1, 2, \dots, N$ .

Remarque: si  $S_0$  est la surface de la sphère de rayon infini, on demandera que  $\phi_{(0)} \rightarrow 0$  au moins comme  $\frac{1}{|\bar{x}|}$ .

## 2.10.2 Capacités, coefficients d'induction

Dans ce paragraphe, nous prendrons  $\phi_{(0)} = 0$  et nous considérerons qu'il n'y a pas de charges dans  $V$ :  $\rho = 0$  donc  $Q = 0$ . Soit  $\phi(\bar{x})$  la solution de l'équation de Laplace dans  $V$  qui prend sur les surfaces  $S_j$  les valeurs constantes  $\phi_{(j)}$ . Désignons par  $\psi_j(\bar{x})$  la solution de l'équation de Laplace dans  $V$  qui prend sur  $S_j$  la valeur 1, sur  $S_k$ ,  $k \neq j$ , la valeur 0. En vertu du théorème d'unicité et de la linéarité du Laplacien, le potentiel  $\phi$  s'écrit

$$\phi(\bar{x}) = \sum_{k=1}^N \phi_{(k)} \psi_k(\bar{x}). \quad (2.10.143)$$

Il en résulte que

$$\partial_n \phi = \sum_{k=1}^N \phi_{(k)} \partial_n \psi_k \quad (2.10.144)$$

donc que

$$Q_j = \epsilon_0 \oint_{S_j} dS E_n^{(+)} = -\epsilon_0 \oint_{S_j} dS \partial_n \phi^{(+)} = \sum_{k=1}^N C_{jk} \phi_{(k)} \quad (2.10.145)$$

où

$$C_{jk} = -\epsilon_0 \oint_{S_j} dS \partial_n \psi_k^{(+)} = -\epsilon_0 \oint_{S_j} d\bar{S} \cdot \bar{\nabla} \psi_k^{(+)} \quad (2.10.146)$$

Ces constantes  $C_{jk}$  sont déterminées par la géométrie des conducteurs; les  $C_{jj}$  sont les *capacités* des conducteurs, les  $C_{jk}$ , pour  $j \neq k$  sont les *coefficients d'induction*. La capacité d'un conducteur est égale à la charge totale portée par ce conducteur lorsque celui-ci est maintenu au potentiel 1 alors que tous les autres sont maintenus au potentiel zéro.

En vertu du théorème d'unicité, les relations (2.10.145) sont inversibles; on peut donc aussi écrire

$$\phi_{(j)} = \sum_{k=1}^N c_{jk} Q_k \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^N C_{jk} c_{k\ell} = \delta_{j\ell}. \quad (2.10.147)$$

L'énergie électrostatique d'un système de conducteurs peut donc prendre diverses formes

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N Q_j \phi_{(j)} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N C_{jk} \phi_{(j)} \phi_{(k)} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N c_{jk} Q_j Q_k. \quad (2.10.148)$$

**Théorème 2.7.** *Les coefficients d'induction sont symétriques:  $c_{jk} = c_{kj}$  donc aussi  $C_{jk} = C_{kj}$  et les coefficients de capacité sont définis positifs:  $C_{jj} \geq 0$ .*

Les démonstrations sont proposées comme exercices.

## 2.11 Tensions Electrostatiques [2, 3]

Calculons la force électrique totale exercée sur les charges contenues dans le volume  $V$ , càd,

$$\bar{F} = \int_V d^3x \rho(\bar{x}) \bar{E}(\bar{x}); \quad (2.11.149)$$

sa  $k$ -ième composante cartésienne vaut

$$F_k = \int_V d^3x \rho(\bar{x}) E_k(\bar{x}) = \int_V d^3x f_k(\bar{x}) \quad (2.11.150)$$

et  $f_k$  est la  $k$ -ième composante de la densité volumique de force. A l'aide des équations de Maxwell, nous allons transformer cette expression pour ne plus y voir apparaître que le champ électrique. Avec  $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \bar{E} = \epsilon_0 \sum_\ell \partial_\ell E_\ell$ , la densité de force devient

$$f_k = \epsilon_0 \sum_\ell E_k \partial_\ell E_\ell \quad (2.11.151)$$

$$= \epsilon_0 \sum_\ell [\partial_\ell (E_k E_\ell) - (\partial_\ell E_k) E_\ell] \quad (2.11.152)$$

$$= \epsilon_0 \sum_\ell [\partial_\ell (E_k E_\ell) - (\partial_k E_\ell) E_\ell] \quad (2.11.153)$$

$$= \epsilon_0 \sum_\ell [\partial_\ell (E_k E_\ell) - \frac{1}{2} \partial_k (E_\ell E_\ell)] \quad (2.11.154)$$

$$= \epsilon_0 \sum_\ell \partial_\ell [E_k E_\ell - \frac{1}{2} \bar{E}^2 \delta_{k\ell}]. \quad (2.11.155)$$

Pour passer de la deuxième à la troisième ligne, nous avons utilisé l'équation  $\nabla \times \bar{E} = 0$  sous la forme  $\partial_\ell E_k = \partial_k E_\ell$ .

La  $k$ -ième composante de la densité de force de volume est égale à la divergence du *tenseur des tensions électrostatiques de Maxwell*

$$f_k = \sum_\ell \partial_\ell T_{k\ell}, \quad (2.11.156)$$

où

$$T_{k\ell} = T_{\ell k} = \epsilon_0 [E_k E_\ell - \frac{1}{2} \bar{E}^2 \delta_{k\ell}]. \quad (2.11.157)$$

En application du théorème de la divergence, la force totale qui s'exerce sur les charges contenues dans le volume  $V$  peut être exprimée entièrement en termes des composantes du tenseur des tensions sur la surface fermée  $S$  qui limite ce volume: en effet

$$F_k = \int_V d^3x \sum_\ell \partial_\ell T_{k\ell} = \sum_\ell \oint_S dS_\ell T_{k\ell} = \oint_S dS \sum_\ell n_\ell T_{k\ell}. \quad (2.11.158)$$

$T_{k\ell}$  est donc la  $k$ -ième composante de la force que le champ exerce sur l'élément de surface d'aire unité perpendiculaire au vecteur  $\bar{1}_\ell$ .

**Exemple:** Considérons une boule de rayon  $a$ , uniformément chargée:  $Q = \rho \frac{4}{3} \pi a^3$ . Coupons-la en deux par un plan qui passe par son centre ( $z = 0$ ) et évaluons la force totale exercée par la demi-boule du bas sur la demi-boule du haut. La surface fermée entourant la distribution sur laquelle on évalue la force est formée de la demi-sphère ( $r = a, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi < 2\pi$ ) et du disque ( $0 \leq r \leq a, \theta = \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi < 2\pi$ ). Rappelons que le champ électrique est radial et qu'il vaut

$$\bar{E}(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \bar{1}_r, & r > a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} r \bar{1}_r, & r < a \end{cases} \quad (2.11.159)$$

et

$$\bar{1}_r = \sin \theta \cos \varphi \bar{1}_x + \sin \theta \sin \varphi \bar{1}_y + \cos \theta \bar{1}_z. \quad (2.11.160)$$

La force totale est évidemment dirigée suivant l'axe  $Oz$ , il suffit donc de calculer (exercice) les composantes  $T_{z\ell}$  du tenseur des tensions:

$$T_{zx} = \epsilon_0 E_z E_x \quad (2.11.161)$$

$$T_{zy} = \epsilon_0 E_z E_y \quad (2.11.162)$$

$$T_{zz} = \frac{\epsilon_0}{2} (E_z^2 - E_x^2 - E_y^2). \quad (2.11.163)$$

Comme élément de surface, on a

$$\overline{dS} = \begin{cases} a^2 d \cos \theta d\varphi \bar{1}_r & \text{pour l'hémisphère nord} \\ -r dr d\varphi \bar{1}_z & \text{pour le disque} \end{cases} \quad (2.11.164)$$

La force sur l'hémisphère vaut

$$\bar{F}_h = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{8a^2} \quad (2.11.165)$$

tandis que la force sur le disque vaut

$$\bar{F}_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{16a^2} \quad (2.11.166)$$

et la force totale est la somme des précédentes

$$\bar{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q^2}{16a^2}. \quad (2.11.167)$$

En fait, dans l'application de (2.11.158), on peut remplacer le volume  $V$  par tout autre volume qui entoure la charge et aucune autre. Dans notre exemple, il est avantageux de prendre pour  $V$  tout le demi-espace  $z > 0$  de sorte que la surface  $S$  devient l'hémisphère supérieur de la sphère  $S_\infty$  (sur lequel  $\bar{E} = 0$ ) et le plan  $z = 0$ : on vérifiera comme exercice que la contribution à la force des points du plan pour  $r > a$  est bien égale à  $\bar{F}_h$  ci-dessus.

## Chapitre 3

# Problèmes aux limites en électrostatique.

De très nombreux problèmes d'électrostatique consistent à résoudre l'équation de Poisson dans un volume limité par des surfaces sur lesquelles soit les potentiels, soit les distributions de charges sont données. Ce chapitre présente quelques méthodes de résolution de ce type de problèmes.

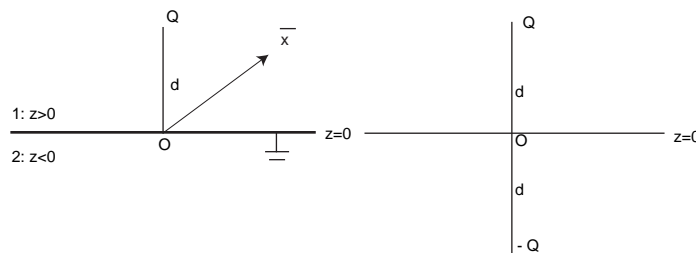
### 3.1 La méthode des images

Cette méthode peut être utile pour trouver le potentiel produit par une (ou plusieurs) charge(s) ponctuelle(s) en présence de surfaces, à la géométrie très simple, par exemple des conducteurs reliés à la terre ou maintenus à des potentiels fixés.

#### 3.1.1 Problème 1

Calculer le potentiel produit par la charge ponctuelle  $Q$  au point  $P'$  de coordonnées cartésiennes  $(0,0,d)$  au dessus d'un plan infini conducteur ( $z = 0$ ), relié à la terre ( $\phi|_{z=0} = 0$ ).

Le plan sépare l'espace en deux régions, à savoir la région [1] des  $z > 0$  et la région [2] des  $z < 0$ .



i) Dans la région [2], il n'y a pas de charges. Le potentiel  $y$  est la solution de l'équation de Laplace nulle sur le plan  $z = 0$  et à l'infini;  $\phi$  y est donc nul et le champ électrique  $y$  est nul aussi.

ii) Dans la région [1], le problème est, a priori, plus compliqué car la charge  $Q$  induit sur le plan conducteur une distribution de charges (inconnue jusqu'ici) telle que le champ qu'elle produit dans la région [2] est égal et opposé au champ coulombien produit par  $Q$ . Nous savons cependant que le potentiel dans la région [1] est solution de l'équation de Poisson (avec  $\rho(\bar{x}) = Q \delta(x) \delta(y) \delta(z - d)$ ), qu'il s'annule à l'infini et sur le plan  $z = 0$  et que ces conditions assurent son unicité.

iii) Considérons, en parallèle, le potentiel de deux charges ponctuelles,  $Q$  en  $(0,0,d)$  et  $(-Q)$  en  $(0,0,-d)$ . Ce potentiel s'annule à l'infini et admet le plan médiateur entre les charges ( $z = 0$ ) comme surface équipotentielle de potentiel nul. En  $\bar{x}$ , arbitraire dans l'espace, il est donné par

$$\phi(\bar{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|\bar{x} - d\bar{1}_z|} - \frac{1}{|\bar{x} + d\bar{1}_z|} \right], \quad (3.1.1)$$

et, pour  $\bar{x}$  dans la région [1] du problème initial, c'est la solution de l'équation de Poisson (avec  $\rho(\bar{x}) = Q \delta(x) \delta(y) \delta(z - d)$ ) qui s'annule sur le plan ( $z = 0$ ) et à l'infini. En vertu du théorème d'unicité, il coïncide donc, dans la région [1] avec le potentiel recherché.

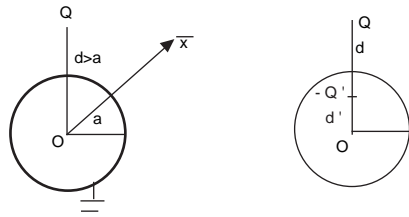
Nous avons donc résolu le problème initial dans la région [1] ( potentiel produit par une charge et satisfaisant une condition aux limites ) en inventant un problème sans condition aux limites sur  $z = 0$ , mais avec une "charge-image" placée dans la région [2] de façon telle que le plan limite soit une surface équipotentielle de potentiel nul.

Le potentiel recherché vaut donc

$$\phi(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{x} \in [2] \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|\bar{x} - d\bar{1}_z|} - \frac{1}{|\bar{x} + d\bar{1}_z|} \right] & \text{si } \bar{x} \in [1]. \end{cases} \quad (3.1.2)$$

### 3.1.2 Problème 2

Calculer le potentiel produit par la charge ponctuelle  $Q$  en  $(0,0,d)$ , à proximité d'une sphère conductrice de rayon  $a < d$ , centrée à l'origine, reliée à la terre ( $\phi|_{S_a} = 0$ ).



Préliminaire: le potentiel produit par deux charges ponctuelles  $Q$  en  $(0,0,d)$  et  $(-Q')$  en  $(0,0,d')$ , ( $d' < d$ ), admet comme équipotentielle de potentiel nul la surface d'équation

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q}{|\bar{x} - d\bar{1}_z|} - \frac{Q'}{|\bar{x} - d'\bar{1}_z|} \right] = 0, \quad (3.1.3)$$

ou

$$\frac{Q}{|\bar{x} - d\bar{1}_z|} = \frac{Q'}{|\bar{x} - d'\bar{1}_z|} \quad (3.1.4)$$

ou encore

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{|\bar{x} - d\bar{1}_z|}{|\bar{x} - d'\bar{1}_z|}. \quad (3.1.5)$$

Or, le lieu géométrique des points  $\bar{x}$  dont le rapport des distances à deux points fixes  $(0,0,d)$  et  $(0,0,d')$  est constant est une sphère d'équation

$$x^2 + y^2 + \left[z - \frac{(\alpha^2 d' - d)}{(\alpha^2 - 1)}\right]^2 = \left[\frac{\alpha^2 (d - d')^2}{(\alpha^2 - 1)^2}\right] \quad (3.1.6)$$

Nous avons posé  $\alpha = \frac{Q}{Q'}$ . Cette sphère a pour centre le point de coordonnées  $(0,0, \frac{\alpha^2 d' - d}{\alpha^2 - 1})$  et pour rayon  $a = \frac{\alpha |d - d'|}{\alpha^2 - 1}$ . En particulier, le centre de la sphère est à l'origine pour  $\alpha^2 d' = d$ ; dans ce cas, son rayon vaut  $a = \frac{d}{\alpha}$ .

Revenons au problème posé: i) à l'intérieur de la sphère (pour  $|\bar{x}| \leq a$ ), le champ électrique est nul, le potentiel est constant, et même nul car nul sur la sphère; ii) pour calculer le potentiel à l'extérieur, on invente une charge-image  $(-Q')$  en  $(0,0,d')$  à l'intérieur de la sphère telle que

$$Q' = Q \frac{a}{d} \quad \text{et} \quad d' = \frac{a^2}{d} \quad (3.1.7)$$

et on calcule le potentiel dû à ces deux charges. Celui-ci vaut

$$\phi(\bar{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|\bar{x} - d\bar{1}_z|} - \frac{a}{d|\bar{x} - \frac{a^2}{d}\bar{1}_z|} \right]. \quad (3.1.8)$$

En vertu du théorème d'unicité, à l'extérieur de la sphère, c'est-à-dire pour  $|\bar{x}| \geq a$ , il coïncide avec le potentiel recherché.

## 3.2 Fonction de Green

On appelle "fonction de Green" ou solution élémentaire de l'équation de Poisson, toute solution  $G(\bar{x}, \bar{x}')$  des équations

$$\Delta G(\bar{x}, \bar{x}') = \Delta' G(\bar{x}, \bar{x}') = -4\pi\delta^3(\bar{x} - \bar{x}'). \quad (3.2.9)$$

On en connaît déjà une, à savoir la fonction  $G_\infty(\bar{x}, \bar{x}') = \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|}$  qui s'annule pour  $|\bar{x}| \rightarrow \infty$  ou pour  $|\bar{x}'| \rightarrow \infty$ . La linéarité de l'équation de Poisson nous assure que toute fonction de Green pourra s'écrire comme

$$G(\bar{x}, \bar{x}') = G_\infty(\bar{x}, \bar{x}') + F(\bar{x}, \bar{x}'), \quad (3.2.10)$$

où  $F(\bar{x}, \bar{x}')$  est solution de l'équation de Laplace. L'intérêt de disposer de solutions élémentaires réside dans le fait qu'elles permettent toujours d'écrire une solution particulière de l'équation de Poisson

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (3.2.11)$$

par convolution avec la source

$$\phi(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R^3} d^3x' \rho(\bar{x}') G(\bar{x}', \bar{x}). \quad (3.2.12)$$



On vérifie immédiatement que (3.2.12) est solution de l'équation de Poisson en prenant le laplacien des deux membres.

Si, dans (3.2.12), on choisit  $G = G_\infty(\bar{x}, \bar{x}')$ , la solution particulière  $\phi$  ainsi construite est celle qui s'annule sur  $S_\infty$  (au moins) comme  $|\bar{x}|^{-1}$ . Selon le choix de  $G$ , on peut donc, non seulement écrire une solution, mais encore satisfaire un problème aux limites. La question se pose alors de construire "la fonction" de Green  $G_S(\bar{x}, \bar{x}')$  appropriée à la résolution d'un problème aux limites sur la surface fermée  $S$  qui est le bord de  $V$ . Utilisons le deuxième théorème de Green (2.9.125) avec

$$f(\bar{x}') = \phi(\bar{x}'), \quad \rightarrow \Delta' \phi(\bar{x}') = -\frac{\rho(\bar{x}')}{\epsilon_0} \quad (3.2.13)$$

$$g(\bar{x}') = \frac{1}{4\pi} G(\bar{x}', \bar{x}), \quad \rightarrow \Delta' \frac{1}{4\pi} G(\bar{x}', \bar{x}) = -\delta^3(\bar{x} - \bar{x}'). \quad (3.2.14)$$

Il vient

$$\begin{aligned} \int_V d^3x' [-G(\bar{x}', \bar{x}) \frac{\rho(\bar{x}')}{4\pi\epsilon_0} + \phi(\bar{x}') \delta^3(\bar{x} - \bar{x}')] \\ = \frac{1}{4\pi} \int_S dS' [G(\bar{x}', \bar{x}) \partial'_n \phi(\bar{x}') - \phi(\bar{x}') \partial'_n G(\bar{x}', \bar{x})]. \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Pour  $\bar{x} \in V$ , ceci donne

$$\begin{aligned} \phi(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \rho(\bar{x}') G(\bar{x}', \bar{x}) \\ + \frac{1}{4\pi} \int_S dS' [G(\bar{x}', \bar{x}) \partial'_n \phi(\bar{x}') - \phi(\bar{x}') \partial'_n G(\bar{x}', \bar{x})]. \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

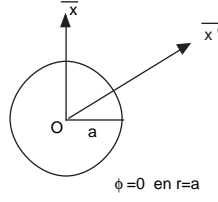
Quelle que soit  $G$ , (3.2.16) établit une relation intégrale entre la valeur du potentiel en un point de  $V$  et les valeurs de  $\phi$  et de sa dérivée normale sur  $S$ . (3.2.16) telle quelle, ne peut pas être utilisée pour calculer  $\phi$  à partir des données  $\phi_S$  et  $\partial_n \phi_S$  car ces données sont redondantes et généralement incompatibles avec l'existence d'une solution. Par contre, si on choisit bien la fonction  $F(\bar{x}', \bar{x})$ , on peut éliminer l'une des deux intégrales de surface du membre de droite de (3.2.16). En particulier, si on choisit  $F$  de sorte que  $G(\bar{x}', \bar{x})$  s'annule pour  $\bar{x}'$  sur  $S$ , alors avec  $G \rightarrow G_S$ , (3.2.16) se réduit à

$$\phi(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \rho(\bar{x}') G_S(\bar{x}', \bar{x}) - \frac{1}{4\pi} \int_S dS' [\phi(\bar{x}') \partial'_n G_S(\bar{x}', \bar{x})]. \quad (3.2.17)$$

En injectant dans l'intégrale de surface la donnée  $\phi_S = \psi$ , cette relation fournit alors le potentiel, en tout point  $\bar{x}$  à l'intérieur de  $V$ , en termes de la distribution de charges et de sa valeur sur  $S$ .

**Remarque 3.1.** *Puisque l'intégrale de volume du membre de droite de (3.2.17) est solution de l'équation de Poisson, l'intégrale de surface est solution de l'équation de Laplace avec condition limite de Dirichlet.*

On pourrait aussi choisir  $F$  pour construire la fonction de Green appropriée à la résolution d'un problème de Neumann, mais sa construction explicite est plus difficile; nous ne le ferons pas ici.



### 3.2.1 Fonction de Green de la sphère (problème extérieur)

Recherchons la fonction de Green  $G(\bar{x}', \bar{x})$ , solution de

$$\Delta' G(\bar{x}', \bar{x}) = -4\pi\delta^3(\bar{x} - \bar{x}') \quad (3.2.18)$$

pour  $|\bar{x}| > a$ , qui s'annule pour  $|\bar{x}'| = a$  et à l'infini. Cette fonction de Green est le potentiel en  $\bar{x}'$  produit par une charge ponctuelle  $Q = -4\pi\epsilon_0$  en  $\bar{x}$  (extérieure à la sphère de rayon  $a$  centrée à l'origine), et qui s'annule sur cette sphère. Nous l'avons déjà calculée par la méthode des images dans le paragraphe précédent; elle est donnée par (3.1.8) ou avec des notations adaptées par

$$G(\bar{x}', \bar{x}) = \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} - \frac{a}{r'|\bar{x} - \frac{a^2}{r^2}\bar{x}'|}, \quad F(\bar{x}, \bar{x}') = -\frac{a}{r'|\bar{x} - \frac{a^2}{r^2}\bar{x}'|} \quad (3.2.19)$$

où  $r' = |\bar{x}'|$ . En introduisant les coordonnées sphériques,

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, & x' &= r' \sin \theta' \cos \varphi' \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, & y' &= r' \sin \theta' \sin \varphi' \\ z &= r \cos \theta, & z' &= r' \cos \theta' \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

et, avec

$$\bar{x} \cdot \bar{x}' = r r' \cos \gamma, \quad \cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'), \quad (3.2.21)$$

elle s'écrit

$$G(\bar{x}', \bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2 r'^2}{a^2} + a^2 - 2rr' \cos \gamma}}. \quad (3.2.22)$$

Et sa dérivée normale vaut, sur la sphère

$$\partial'_n G(\bar{x}', \bar{x})|_{r'=a} = -\frac{\partial}{\partial r'} G(\bar{x}, \bar{x}')|_{r'=a} = -\frac{r^2 - a^2}{a(r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.2.23)$$

Le signe  $(-)$  devant le deuxième terme provient du fait que la normale à  $S$  doit être orientée vers l'extérieur du volume, soit ici vers l'intérieur de la sphère.

### 3.2.2 Solution de l'équation de Laplace (Dirichlet)

(3.2.17), avec  $\rho = 0$ , et (3.2.23) donnent la solution de l'équation de Laplace, pour  $|\bar{x}| = r > a$ , qui prend sur la sphère la valeur:  $\phi(a, \theta, \varphi) = \psi(\theta, \varphi)$ ,

$$\phi(\bar{x}) = \frac{a}{4\pi} \int_{-1}^1 d \cos \theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{(r^2 - a^2) \psi(\theta', \varphi')}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.2.24)$$

## Chapitre 4

# Méthode de séparation des variables

La résolution des équations aux dérivées partielles linéaires de la physique mathématique se simplifie souvent en passant par la méthode dite de "séparation des variables". Elle consiste à construire une infinité de solutions (qui forment un ensemble complet orthonormé de solutions), sous la forme de produits de fonctions d'une seule variable, et qui offrent la possibilité d'exprimer la solution de l'équation aux dérivées partielles linéaires recherchée sous la forme de développements en séries (ou en intégrales). Les équations dans lesquelles figure le laplacien admettent des solutions par séparation des variables dans onze systèmes de coordonnées différents. Nous n'utiliserons ici que les coordonnées cartésiennes et les coordonnées sphériques; le cas des coordonnées cylindriques est aussi traité, par exemple, dans [1].

### 4.1 Eq. de Laplace en coordonnées cartésiennes

Cette équation s'écrit

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0. \quad (4.1.1)$$

La méthode de séparation des variables consiste à en rechercher les solutions de la forme

$$\phi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z). \quad (4.1.2)$$

En portant (4.1.2) dans (4.1.1) puis en divisant le tout par le produit  $XYZ$  supposé non nul, il vient

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2Z}{dz^2} = 0; \quad (4.1.3)$$

les dérivées partielles sont devenues des dérivées ordinaires puisqu'elles ne portent plus que sur des fonctions d'une seule variable. (4.1.3) exprime que la somme d'une fonction qui ne dépend que de  $x$ , d'une fonction qui ne dépend que de  $y$  et d'une fonction qui ne dépend que de  $z$  est nulle. Les variables  $x,y,z$  étant indépendantes,

ceci ne peut avoir lieu que i) si chacune de ces fonctions est constante et ii) si la somme des constantes est nulle, donc si

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \lambda X \quad (4.1.4)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} = \mu Y \quad (4.1.5)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = \nu Z \quad (4.1.6)$$

avec  $\lambda, \mu, \nu \in R$  et

$$\lambda + \mu + \nu = 0 \quad (4.1.7)$$

Si les conditions aux limites ne peuvent être satisfaites que lorsque les constantes réelles  $\lambda$  et  $\mu$  sont négatives, on pose

$$\lambda = -\alpha^2 \quad \text{et} \quad \mu = -\beta^2 \quad (4.1.8)$$

alors

$$\nu = \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 > 0. \quad (4.1.9)$$

Les équations ci-dessus admettent alors comme solutions générales

$$X(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x \quad (4.1.10)$$

$$Y(y) = C \cos \beta y + D \sin \beta y \quad (4.1.11)$$

$$Z(z) = E \cosh \gamma z + F \sinh \gamma z \quad (4.1.12)$$

et  $\phi$  solution de l'équation de Laplace peut s'écrire comme combinaison linéaire générale des solutions particulières ainsi construites

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = \sum_{\alpha, \beta} & \\ & \{ A_{\alpha\beta} \cos \alpha x \cos \beta y \cosh \gamma z + B_{\alpha\beta} \cos \alpha x \cos \beta y \sinh \gamma z \\ & + C_{\alpha\beta} \cos \alpha x \sin \beta y \cosh \gamma z + D_{\alpha\beta} \cos \alpha x \sin \beta y \sinh \gamma z \\ & + E_{\alpha\beta} \sin \alpha x \cos \beta y \cosh \gamma z + F_{\alpha\beta} \sin \alpha x \cos \beta y \sinh \gamma z \\ & + G_{\alpha\beta} \sin \alpha x \sin \beta y \cosh \gamma z + H_{\alpha\beta} \sin \alpha x \sin \beta y \sinh \gamma z \} \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

#### 4.1.1 Exemple

Potentiel à l'intérieur d'une boîte parallélépipédique qui s'annule sur les faces  $x = 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0$  et prend en  $z = c$  la valeur  $V(x, y)$ .

i) en  $x = 0$ : pour assurer cette condition limite, il faut que

$$A_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta} = 0. \quad (4.1.14)$$

ii) en  $x = a$ : on ne peut pas annuler les constantes restantes sinon le potentiel  $\phi$  serait identiquement nul. On assure donc cette condition limite en restreignant les valeurs de  $\alpha$  de sorte que  $(\alpha a)$  coïncide avec les zéros de la fonction sinus:

$$\alpha a = n \pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{a} \quad (4.1.15)$$

iii) en  $y = 0$ :

$$E_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} = 0 \quad (4.1.16)$$

iv) en  $y = b$ :

$$\beta b = m\pi \quad m = 1, 2, 3, \dots \rightarrow \beta = \frac{m\pi}{b} \quad (4.1.17)$$

v) en  $z = 0$ :

$$G_{\alpha\beta} = 0. \quad (4.1.18)$$

La solution générale de l'équation de Laplace qui satisfait toutes les conditions limites précédentes s'écrit donc comme

$$\phi(x, y, z) = \sum_{n, m=1}^{\infty} H_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \sinh \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2}} z. \quad (4.1.19)$$

Traisons, à présent, la dernière condition limite: en  $z = c$ , le potentiel vaut  $V(x, y)$  ou

$$\phi(x, y, c) = V(x, y) \quad (4.1.20)$$

donc aussi, en posant  $z = c$  dans (4.1.19),

$$V(x, y) = \sum_{n, m=1}^{\infty} H_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \sinh \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2}} c \quad (4.1.21)$$

$$= \sum_{n, m=1}^{\infty} V_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (4.1.22)$$

où nous avons posé

$$[H_{nm} \sinh \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2}} c] = V_{nm}. \quad (4.1.23)$$

Les coefficients  $V_{nm}$  sont les coefficients de la série de Fourier de la fonction  $V(x, y)$ , ils se calculent par les formules d'inversion de Fourier:

$$\frac{2}{a} \int_0^a dx \frac{2}{b} \int_0^b dy V(x, y) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} = V_{nm}. \quad (4.1.24)$$

Leur connaissance détermine les coefficients  $H_{nm}$  par

$$H_{nm} = V_{nm} [\sinh \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2}} c]^{-1} \quad (4.1.25)$$

donc aussi le potentiel  $\phi$  par (4.1.19).

**Remarque 4.1.** La formule d'inversion découle du fait que, pour  $n$  et  $n' = 1, 2, 3, \dots$ ,

$$\int_0^a dx \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n'\pi x}{a} = \frac{a}{\pi} \int_0^\pi du \sin nu \sin n'u = \frac{a}{2} \delta_{nn'}. \quad (4.1.26)$$

Par exemple, pour  $V(x, y) = V_0$

$$V_{nm} = \frac{4V_0}{\pi^2 n m} [1 - (-1)^n] [1 - (-1)^m]. \quad (4.1.27)$$

## 4.2 Eq. de Laplace en coordonnées sphériques

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (4.2.28)$$

On en recherche des solutions de la forme

$$\phi(r, \theta, \varphi) = R(r) P(\theta) Q(\varphi). \quad (4.2.29)$$

En portant (4.2.29) dans (4.2.28), en divisant le tout par  $R P Q$  supposé non nul, puis en multipliant par  $r^2 \sin^2 \theta$ , il vient

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{P} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = 0. \quad (4.2.30)$$

La somme des deux premiers termes ne dépend que des variables  $r$  et  $\theta$ , le troisième terme n'est fonction que de  $\varphi$ . L'égalité ne peut avoir lieu que si

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{P} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = m^2 \quad (4.2.31)$$

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = -m^2. \quad (4.2.32)$$

où  $m$  est une constante. L'équation (4.2.32) admet comme solutions

$$Q_{\pm m} = e^{\pm i m \varphi}. \quad (4.2.33)$$

$\varphi$  étant une variable angulaire, on impose aux fonctions  $Q_{\pm m}$  d'être des fonctions périodiques de  $\varphi$  de période  $2\pi$ , ce qui restreint les valeurs de  $m$  à

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (4.2.34)$$

Reprenons l'équation (4.2.31): divisée par  $\sin^2 \theta$ , elle devient

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = 0. \quad (4.2.35)$$

Le premier terme de (4.2.35) n'est fonction que de  $r$ , la somme des deux autres n'est fonction que de  $\theta$ ; encore une fois, l'égalité (4.2.35) ne peut avoir lieu que si

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \ell(\ell + 1) \quad (4.2.36)$$

$$\frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = -\ell(\ell + 1). \quad (4.2.37)$$

Les conditions de régularité des solutions de l'équation en  $\theta$  exposées plus en détail dans l'appendice 4 imposent à la constante  $\ell$  d'être un nombre entier non négatif

$$\ell = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.2.38)$$

L'équation (4.2.36) est l'équation radiale ou équation d'EULER; elle admet comme solution générale, dans un domaine qui ne contient pas l'origine ( $r = 0$ ) et qui ne s'étend pas jusqu'à l'infini,

$$R_\ell(r) = A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-\ell-1}. \quad (4.2.39)$$

Si le domaine contient l'origine, les constantes  $B_\ell$  doivent être nulles; si le domaine s'étend jusqu'à l'infini, les constantes  $A_\ell$ ,  $\ell \neq 0$  doivent être nulles.

### 4.2.1 Equation et Polynômes de Legendre

En terme de la nouvelle variable

$$\mu = \cos \theta, \quad (4.2.40)$$

l'équation (4.2.37) se met sous la forme

$$\frac{d}{d\mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{dP}{d\mu} \right] + \left[ \ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right] P = 0. \quad (4.2.41)$$

Le cas particulier où  $m = 0$  se présente dans les problèmes à symétrie axiale, lorsque la fonction  $\phi$  ne dépend pas de l'angle azimuthal  $\varphi$  (la fonction  $Q$  se réduit alors à une constante). Dans ce cas, l'équation ci-dessus devient

$$\frac{d}{d\mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{dP}{d\mu} \right] + \ell(\ell + 1) P = 0. \quad (4.2.42)$$

C'est l'équation de LEGENDRE.

Pour chaque valeur de  $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$ , elle admet une solution particulière, régulière en  $\mu = \pm 1$ , qui est un polynôme  $P_\ell(\mu)$ , de degré  $\ell$ . Ces polynômes sont les *polynômes de Legendre*. Un appendice leur est consacré. Ils forment un ensemble complet (pour les fonctions de carré sommable) de fonctions orthogonales sur le segment  $[-1, +1]$ , dans le sens que

$$\int_{-1}^1 d\mu P_\ell(\mu) P'_\ell(\mu) = \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell\ell'} \quad (4.2.43)$$

et, que toute fonction  $f$  dans  $L_2[-1, 1]$ ,  $f$  admet un développement, convergent en moyenne quadratique, de la forme

$$f(\mu) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell P_\ell(\mu) \quad (4.2.44)$$

avec

$$c_\ell = \frac{2\ell + 1}{2} \int_{-1}^1 f(\mu) P_\ell(\mu). \quad (4.2.45)$$

### 4.2.2 Eq. de Laplace: Solution à symétrie azimuthale

La solution générale de l'équation de Laplace, à symétrie azimuthale peut s'écrire comme

$$\phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-\ell-1}) P_\ell(\cos \theta). \quad (4.2.46)$$

Les constantes  $A_\ell$  et  $B_\ell$  sont déterminées par les conditions aux limites imposées à la solution et par le domaine dans lequel on travaille.

Pour  $\ell = 0$ , cette solution se réduit à la solution générale, à symétrie sphérique de l'équation de Laplace

$$\phi(r) = A_0 + B_0 \frac{1}{r}, \quad (4.2.47)$$

mais, comme on le sait, la fonction  $\frac{1}{r}$  n'est solution de l'équation de Laplace que dans l'espace  $R^3$  dont on exclut l'origine.

### 4.2.3 Harmoniques sphériques

Pour  $m \neq 0$ , il nous faut retourner à l'équation (4.2.41). Celle-ci admet des solutions régulières en  $\mu = \pm 1$  pour

$$\ell = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.2.48)$$

$$m = -\ell, -\ell + 1, -\ell + 2, \dots, \ell - 1, \ell. \quad (4.2.49)$$

La solution régulière en  $\mu = \pm 1$  de (4.2.41) est la fonction de Legendre associée,  $P_\ell^m(\mu)$ , donnée, pour  $m \geq 0$ , par la formule de Rodrigues

$$P_\ell^m(\mu) = \frac{1}{2^\ell \ell!} (1 - \mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{\ell+m}}{d\mu^{\ell+m}} (\mu^2 - 1)^\ell. \quad (4.2.50)$$

Toute la dépendance angulaire en  $\theta, \varphi$  de la solution de l'équation de Laplace peut être regroupée dans la fonction de Laplace ou harmonique sphérique définie, pour  $m \geq 0$ , par

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = (-)^m \sqrt{\frac{(2\ell + 1)(\ell - m)!}{4\pi(\ell + m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (4.2.51)$$

tandis que

$$Y_\ell^{-m} = (-)^m [Y_\ell^m(\theta, \varphi)]^*. \quad (4.2.52)$$

Ces fonctions forment un système complet orthonormé de fonctions sur la sphère de rayon unité

$$\int_{-1}^1 d\cos \theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_\ell^{*m}(\theta, \varphi) Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \varphi) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (4.2.53)$$

et toute fonction  $g(\theta, \phi)$  de carré sommable sur la sphère admet un développement, convergent en moyenne quadratique, de la forme

$$g(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} c_{\ell m} Y_\ell^m(\theta, \varphi) \quad (4.2.54)$$

avec

$$c_{\ell m} = \int_{-1}^1 d\cos \theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_\ell^{*m}(\theta, \varphi) g(\theta, \varphi). \quad (4.2.55)$$

### 4.2.4 Equation de Laplace: solution générale

La solution générale de l'équation de Laplace peut s'écrire sous la forme d'un développement en harmoniques sphériques

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (A_{\ell m} r^\ell + B_{\ell m} r^{-\ell-1}) Y_\ell^m(\theta, \varphi). \quad (4.2.56)$$

Les constantes  $A_{\ell m}$  et  $B_{\ell m}$  seront déterminées par les conditions aux limites et par le domaine dans lequel on résoud l'équation.

Plus d'informations concernant ces harmoniques sphériques et leur utilisation peuvent être trouvées en appendice.



## 4.3 Problèmes à symétrie azimuthale [1]

### 4.3.1 Exemple 1

Potentiel d'une charge ponctuelle  $Q$  placée en  $(0,0,d)$  à proximité d'une sphère conductrice (centrée à l'origine, de rayon  $a < d$ ) mise à la terre.

- Pour  $r < a$ ,  $\phi = 0$

- Pour  $r > a$ ,  $\phi(r,\theta)$  est solution à symétrie azimuthale de l'équation de Poisson

$$\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0} Q \delta^3(\bar{x} - d\bar{1}_z) \quad (4.3.57)$$

Une solution particulière est donnée par le potentiel coulombien

$$\phi_c(r,\theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\bar{x} - d\bar{1}_z|} \quad (4.3.58)$$

La solution générale qui s'annule à l'infini au moins comme  $\frac{1}{|\bar{x}|}$ , s'écrit donc comme

$$\phi(r,\theta) = \phi_c(r,\theta) + \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell r^{-\ell-1} P_\ell(\cos\theta) \quad (4.3.59)$$

Il nous faut encore assurer la continuité du potentiel en  $r = a$ . Pour cela, nous faisons appel à la fonction génératrice des polynômes de Legendre, qui, pour  $r = a < d$ , fournit

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{a^\ell}{d^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta) \quad (4.3.60)$$

La condition  $\phi(a,\theta) = 0$  devient donc

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{a^\ell}{d^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta) + \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell a^{-\ell-1} P_\ell(\cos\theta) = 0 \quad (4.3.61)$$

d'où on tire

$$B_\ell = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^{2\ell+1}}{d^{\ell+1}} \quad (4.3.62)$$

qui, injectés dans (4.3.59), fournissent le potentiel recherché.

### 4.3.2 Exemple 2

Potentiel produit par la répartition de charges  $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta$  sur la sphère de rayon  $a$

- Pour  $r < a$ ,

$$\phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta) \quad (4.3.63)$$

- Pour  $r > a$ ,

$$\phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell r^{-\ell-1} P_\ell(\cos\theta) \quad (4.3.64)$$

La condition de continuité du potentiel en  $r = a$  fournit

$$A_\ell a^\ell = B_\ell a^{-\ell-1} \quad \rightarrow \quad A_\ell a^{2\ell+1} = B_\ell \quad (4.3.65)$$

La donnée de la distribution de charges en surface est équivalente à la donnée de la discontinuité de la composante normale du champ électrique:

$$\sum_\ell (\ell + 1) B_\ell a^{-\ell-2} P_\ell(\cos \theta) + \sum_\ell \ell A_\ell a^{\ell-1} P_\ell(\cos \theta) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\theta) \quad (4.3.66)$$

ou

$$\sum_\ell [(\ell + 1) B_\ell a^{-\ell-2} + \ell A_\ell a^{\ell-1}] P_\ell(\cos \theta) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\theta) \quad (4.3.67)$$

ou, en utilisant (4.3.65) et le développement de  $\sigma(\theta)$  en série de polynômes de Legendre

$$\sum_\ell (2\ell + 1) A_\ell a^{\ell-1} P_\ell(\cos \theta) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} P_1(\cos \theta) \quad (4.3.68)$$

On en tire donc, en identifiant les coefficients des  $P_\ell$  dans les deux membres

$$A_\ell = 0, \forall \ell \neq 1, \quad A_1 = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} = B_1 a^{-3} \quad (4.3.69)$$

En conclusion, à l'intérieur de la sphère, c'est-à-dire pour  $r < a$ , le potentiel vaut

$$\phi(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} r P_1(\cos \theta) = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} z \quad (4.3.70)$$

et le champ électrique est constant ( $\vec{E} = E_z \vec{1}_z$ ,  $E_z = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}$ ); à l'extérieur de la sphère, donc pour  $r > a$ ,

$$\phi(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^2} P_1(\cos \theta). \quad (4.3.71)$$

C'est le potentiel d'un dipôle électrique, à l'origine, de moment dipolaire

$$\vec{p} = p_z \vec{1}_z = \frac{\sigma_0 4\pi a^3}{3} \vec{1}_z. \quad (4.3.72)$$

### 4.3.3 Exemple 3

Potentiel produit par un disque de rayon  $a$  uniformément chargé, pour  $r > a$ .

Dans cette région, le potentiel est solution de l'équation de Laplace; il peut s'écrire comme

$$\phi(r, \theta) = \sum_\ell B_\ell r^{-\ell-1} P_\ell(\cos \theta) \quad (4.3.73)$$

Il nous reste donc à calculer les  $B_\ell$ . Or, en un point de l'axe du disque, soit en  $r = z > 0$  et  $\theta = 0$ , le potentiel vaut (voir exercice 7)

$$\phi(r = z, \theta = 0) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} [\sqrt{a^2 + z^2} - z] \quad (4.3.74)$$

Pour  $z > a$ , (4.3.74) admet le développement suivant

$$\phi(r = z, \theta = 0) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} z \left[ \sqrt{1 + \frac{a^2}{z^2}} - 1 \right] \quad (4.3.75)$$

$$= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} z \left[ \frac{\xi}{2} - \frac{\xi^2}{8} + \frac{\xi^3}{16} - \frac{5\xi^4}{128} + \dots \right] \quad (4.3.76)$$

où  $\xi = \frac{a^2}{z^2}$ . En identifiant ce développement à (4.3.73), pour  $r = z$  et  $\cos \theta = 1$  donc  $P_\ell(1) = 1$ ,

$$\sum_{\ell} B_{\ell} \frac{1}{z^{\ell+1}} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} z \left[ \frac{\xi}{2} - \frac{\xi^2}{8} + \frac{\xi^3}{16} - \frac{5\xi^4}{128} + \dots \right] \quad (4.3.77)$$

on extrait que les seuls coefficients  $B_{\ell}$  non nuls sont

$$B_0 = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \frac{a^2}{2}, \quad B_2 = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \frac{a^4}{8}, \quad B_4 = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \frac{a^6}{16}, \quad B_6 = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \frac{5a^8}{128} \dots \quad (4.3.78)$$

## Chapitre 5

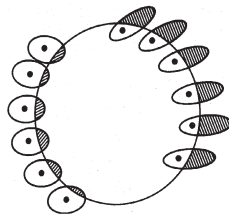
# Electrostatique des diélectriques

Les diélectriques ou isolants sont des substances dans lesquelles les particules chargées sont fortement liées à leurs molécules. Sous l'effet d'un champ électrique, les particules chargées peuvent modifier leurs positions (les particules positives se déplaçant dans la direction du champ, les particules négatives dans la direction opposée), donc déformer les atomes et les molécules, mais elles ne peuvent en sortir. Ceci décrit en fait un diélectrique idéal, dont la conductivité est nulle en présence d'un champ électrique; un diélectrique réaliste possède toujours une faible conductivité mais elle est de l'ordre de  $10^{-20}$  fois la conductivité d'un bon conducteur.

A côté des conducteurs et des diélectriques, il existe des substances (les semi-conducteurs et les électrolytes, par exemple) qui ont des propriétés intermédiaires entre les conducteurs et les diélectriques: ils se comportent essentiellement comme des conducteurs, mais mettent un temps beaucoup plus long pour atteindre un état d'équilibre, lorsqu'ils sont soumis à un champ électrostatique.

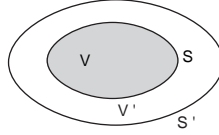
### 5.1 Polarisation

#### 5.1.1 Pas de charges extérieures



Considérons d'abord un échantillon de diélectrique localisé dans un volume  $V$  limité par la surface fermée  $S$ , dans lequel les seules particules chargées sont celles qui composent les molécules. Puisque les charges ne peuvent pas circuler librement à l'intérieur, la déformation des molécules peut produire à l'intérieur du diélectrique une distribution de charges de densité  $\rho_p(\vec{x})$  et donc un champ électrique  $\vec{E}_p$  qui satisfait les équations

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_p = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_p = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_p. \quad (5.1.1)$$



L'échantillon étant localisé,  $\rho_p$  est nul en dehors de  $V$ ; et, puisqu'il n'y a pas de charges apportées de l'extérieur, l'échantillon reste globalement neutre. Soit  $S'$  limite du volume  $V'$ , une surface fermée entourant l'échantillon, sans le toucher; on a

$$Q_p = \lim_{V' \rightarrow V} \int_{V'} d^3x \rho_p(\bar{x}) = 0. \quad (5.1.2)$$

Une telle distribution de charges peut être décrite en terme d'un champ vectoriel  $\bar{P}(\bar{x})$ , appelé polarisation diélectrique, par

$$\rho_p(\bar{x}) = -\bar{\nabla} \cdot \bar{P}(\bar{x}) \quad \text{pour } \bar{x} \text{ dans } V \quad (5.1.3)$$

$$\rho_p(\bar{x}) = 0 \quad \text{et} \quad \bar{P}(\bar{x}) = 0 \quad \text{pour } \bar{x} \text{ hors de } V. \quad (5.1.4)$$

Cette description est cohérente car, par le théorème d'Ostrogradsky, on a bien

$$\int_{V'} d^3x \rho_p(\bar{x}) = - \int_{V'} d^3x \bar{\nabla} \cdot \bar{P}(\bar{x}) = - \oint_{S'} \bar{dS} \cdot \bar{P}(\bar{x}) = 0 \quad (5.1.5)$$

puisque  $\bar{P}$  est nul sur  $S'$ . La polarisation est aussi responsable d'une répartition de charges  $\sigma_p$  en surface: pour la mettre en évidence, considérons une petite boite cylindrique infiniment plate (pilbox), à cheval sur la surface  $S$  de l'échantillon, et de section  $dS$

$$\int_{boite} d^3x \rho_p = - \int_{boite} d^3x \bar{\nabla} \cdot \bar{P} = - \oint_{surf.boite} \bar{dS} \cdot \bar{P} \quad (5.1.6)$$

$$= - \bar{n}' \cdot \bar{P} dS = \bar{n} \cdot \bar{P} dS = \sigma_p dS. \quad (5.1.7)$$

$\bar{n}'$  est le vecteur normal à  $S$  pointant vers l'intérieur de l'échantillon, et  $\bar{n} = -\bar{n}'$ . On tire donc de (5.1.7)

$$\sigma_p = P_n = \bar{n} \cdot \bar{P} \quad \text{sur } S. \quad (5.1.8)$$

Un diélectrique polarisé se caractérise donc par une distribution volumique  $\rho_p$  de charges à l'intérieur et une distribution surfacique de charges  $\sigma_p$  sur le bord,

$$\rho_p(\bar{x}) = -\bar{\nabla} \cdot \bar{P}(\bar{x}), \quad \bar{x} \in V \quad (5.1.9)$$

$$\sigma_p(\bar{x}) = \bar{n}(\bar{x}) \cdot \bar{P}(\bar{x}), \quad \bar{x} \in S. \quad (5.1.10)$$

Nous avons fait l'hypothèse que la charge totale de l'échantillon de diélectrique était nulle, autrement dit que

$$Q_p = \lim_{V' \rightarrow V} \int_{V'} d^3x \rho = \int_V d^3x \rho_p + \oint_S dS \sigma_p = 0, \quad (5.1.11)$$

mais quel est son moment dipolaire? Calculons-le:

$$\bar{p} = \int_V d^3x \bar{x} \rho_p(\bar{x}) + \oint_S dS \bar{x} \sigma_p = - \int_V d^3x \bar{x} [\bar{\nabla} \cdot \bar{P}] + \oint_S (\bar{dS} \cdot \bar{P}) \bar{x}. \quad (5.1.12)$$

La composante  $p_k$  du moment dipolaire est donc

$$p_k = - \int_V d^3x x^k [\nabla \cdot \bar{P}] + \oint_S (\bar{dS} \cdot \bar{P}) x^k \quad (5.1.13)$$

$$= - \int_V d^3x x^k \sum_{\ell} \partial_{\ell} P_{\ell} + \oint_S (\bar{dS} \cdot \bar{P}) x^k \quad (5.1.14)$$

$$= - \sum_{\ell} \int_V d^3x [\partial_{\ell}(x^k P_{\ell}) - \delta_{\ell}^k P_{\ell}] + \oint_S (\bar{dS} \cdot \bar{P}) x^k \quad (5.1.15)$$

$$= \int_V d^3x P_k, \quad (5.1.16)$$

car, par le théorème d'Ostrogradsky,

$$- \sum_{\ell} \int_V d^3x \partial_{\ell}(x^k P_{\ell}) = - \oint_S \sum_{\ell} dS_{\ell} (x^k P_{\ell}) = - \oint_S \bar{dS} \cdot \bar{P} x^k. \quad (5.1.17)$$

On a donc

$$\bar{p} = \int_V d^3x \bar{P}(\bar{x}). \quad (5.1.18)$$

La polarisation introduite en (5.1.3), (5.1.4) n'est donc rien d'autre que la densité volumique de moment dipolaire électrique dans le diélectrique. Le potentiel de polarisation est donné par

$$\phi_P(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_V d^3x' \frac{\rho_P(\bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|} + \oint_S dS' \frac{\sigma_P(\bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \right] \quad (5.1.19)$$

$$= - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \bar{P}(\bar{x}') \cdot \bar{\nabla} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|}. \quad (5.1.20)$$

### 5.1.2 Polarisation uniforme

Lorsque la polarisation est uniforme,  $\bar{P}(\bar{x}) = \bar{P}_0$ , les charges de polarisation se distribuent uniquement en surface:

$$\rho_p = 0 \quad , \quad \sigma_p = \bar{P}_0 \cdot \bar{n}. \quad (5.1.21)$$

Le potentiel qu'elles produisent se calcule alors soit par

$$\phi_P(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S dS' \frac{\sigma_p(\bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \quad (5.1.22)$$

soit par

$$\phi_P(\bar{x}) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \bar{P}_0 \cdot \int_V d^3x' \bar{\nabla} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \quad (5.1.23)$$

$$= \frac{1}{\rho_0} \bar{P}_0 \cdot \bar{\mathcal{E}}(\bar{x}) \quad (5.1.24)$$

où le champ auxiliaire

$$\bar{\mathcal{E}}(\bar{x}) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \rho_0 \bar{\nabla} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \quad (5.1.25)$$

est égal au champ électrique de la distribution uniforme de charge  $\rho_0$  dans  $V$ . Le champ électrique produit par le diélectrique uniformément polarisé peut donc se calculer comme

$$\bar{E}(\bar{x}) = -\bar{\nabla} \phi_P(\bar{x}) = -\bar{\nabla} \left[ \frac{1}{\rho_0} \bar{P}_0 \cdot \bar{\mathcal{E}}(\bar{x}) \right] \quad (5.1.26)$$

ou, pour la  $k$ -ième composante,

$$E_k(\bar{x}) = -\frac{1}{\rho_0} \partial_k [P_0^\ell \mathcal{E}_\ell(\bar{x})] \quad (5.1.27)$$

$$= -\frac{1}{\rho_0} P_0^\ell \partial_k \mathcal{E}_\ell(\bar{x}) \quad (5.1.28)$$

$$= -\frac{1}{\rho_0} P_0^\ell \partial_\ell \mathcal{E}_k(\bar{x}) \quad (5.1.29)$$

$$= -\frac{1}{\rho_0} \bar{P}_0 \cdot \bar{\nabla} \mathcal{E}_k(\bar{x}) \quad (5.1.30)$$

ou encore comme

$$\bar{E}(\bar{x}) = -\frac{1}{\rho_0} (\bar{P}_0 \cdot \bar{\nabla}) \bar{\mathcal{E}}(\bar{x}) \quad (5.1.31)$$

On a utilisé, pour le champ auxiliaire, l'équation

$$\partial_k \mathcal{E}_\ell = \partial_\ell \mathcal{E}_k. \quad (5.1.32)$$

Exemple: Potentiel produit par une boule diélectrique de rayon  $a$  uniformément polarisée:  $\bar{P} = P_0 \bar{1}_z$

L'application du théorème de Gauss fournit

- pour  $r < a$ :

$$\bar{\mathcal{E}}^{in} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \bar{1}_r = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} [x \bar{1}_x + y \bar{1}_y + z \bar{1}_z] \quad (5.1.33)$$

- pour  $r > a$ :

$$\bar{\mathcal{E}}^{out} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^2} \bar{1}_r = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^3} [x \bar{1}_x + y \bar{1}_y + z \bar{1}_z] \quad (5.1.34)$$

donc

- à l'intérieur de la boule

$$\bar{E}^{in} = -\frac{P_0}{\rho_0} \partial_z \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} [x \bar{1}_x + y \bar{1}_y + z \bar{1}_z] = -\frac{P_0}{3\epsilon_0} \bar{1}_z = -\frac{\bar{P}_0}{3\epsilon_0} \quad (5.1.35)$$

- à l'extérieur de la boule

$$\bar{E}^{out} = \frac{a^3}{3\epsilon_0} \frac{3\bar{1}_r \cdot (\bar{1}_r \cdot \bar{P}_0) - \bar{P}_0}{r^3} \quad (5.1.36)$$

C'est le champ électrique d'un dipôle, à l'origine, de moment dipolaire

$$\bar{p} = \frac{4}{3} \pi a^3 \bar{P}_0. \quad (5.1.37)$$

La densité surfacique de charge de polarisation vaut

$$\sigma_p = \bar{P}_0 \cdot \bar{1}_r = P_0 \cos \theta. \quad (5.1.38)$$

### 5.1.3 Diélectrique avec charges extérieures

Si l'on introduit, dans un diélectrique, des charges extérieures (particules chargées, conducteurs chargés,...) en plus des charges structurales qui composent le diélectrique, toutes les charges présentes produisent un champ électrique total qui obéit aux équations

$$\overline{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad (5.1.39)$$

et

$$\overline{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho = \frac{1}{\epsilon_0} [\rho_p + \rho_{ext}]. \quad (5.1.40)$$

Les charges liées pouvant s'exprimer en terme de la polarisation, on a

$$\overline{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} [-\overline{\nabla} \cdot \vec{P} + \rho_{ext}] \quad (5.1.41)$$

ou

$$\overline{\nabla} \cdot \left[ \vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \right] = \frac{\rho_{ext}}{\epsilon_0}. \quad (5.1.42)$$

On introduit le *déplacement électrique*  $\vec{D}$  par

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) + \vec{P}(\vec{x}), \quad (5.1.43)$$

il obéit à l'équation

$$\overline{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{ext}. \quad (5.1.44)$$

Noter que les équations générales de l'électrostatique restent valables dans tous les cas; mais dans un diélectrique, la partie ( $\rho_p$ ) des sources due à la structure du diélectrique ne peut pas être donnée arbitrairement. Les charges liées sont déterminées par la manière dont la matière réagit à l'application d'un champ. Les densités  $\rho_p, \sigma_p$  ou la polarisation  $\vec{P}$  sont des inconnues du problème. Pour déterminer  $\vec{P}$ , il faut injecter des informations supplémentaires qui viennent soit de l'expérience, soit d'une étude au niveau microscopique, c'est-à-dire, qu'il faut se donner une relation fonctionnelle  $\vec{P} = \vec{P}[\vec{E}]$ ; nous y reviendrons plus loin.

## 5.2 Origine moléculaire de la polarisation

### 5.2.1 Polarisation moléculaire

C'est le mécanisme le plus général de formation de la polarisation. Sous l'effet d'un champ électrique, toute molécule se déforme: les charges positives et négatives étant soumises à des forces de signes contraires. Ce mouvement des charges est contré par les forces intra-atomiques. On en arrive à une distribution de charges localement asymétrique mais globalement neutre et qui, à des distances grandes par rapport à la dimension moléculaire, est caractérisée par un moment dipolaire. Ce moment est nul en l'absence de champ. Pour des champs faibles, il dépend linéairement du champ; pour des champs plus forts, de nombreux effets non-linéaires apparaissent (saturation, ionisation,...).



### 5.2.2 Dipôles permanents

Certaines molécules ont une distribution de charges asymétrique, même dans leur état fondamental ( $HCl, H_2O, \dots$ ). Elles ont un moment dipolaire permanent, même en l'absence de champ électrique extérieur, mais elles se meuvent et tournent librement sous l'effet de l'agitation thermique, de sorte qu'elles ne privilégient aucune direction et, qu'en moyenne, le moment dipolaire de l'échantillon est nul.

Si l'on applique un champ électrique, les dipôles locaux ont tendance à s'orienter dans la direction du champ. Sous l'effet combiné des forces électriques et de l'agitation thermique, l'orientation des dipôles reste cependant partielle (elle augmente lorsque le champ augmente ou lorsque la température diminue); il apparaît un moment dipolaire macroscopique, donc une polarisation, fonction croissante du champ. En première approximation, la relation entre  $\bar{P}$  et  $\bar{E}$  est linéaire.

### 5.2.3 Matériaux ferro-électriques

Dans ces matériaux, les interactions entre les dipôles moléculaires permanents peuvent être si importantes qu'elles provoquent (à basse température) une orientation spontanée de ces dipôles, même en l'absence de champ.

### 5.2.4 Autres

Il existe des matériaux où les mécanismes de polarisation sont encore plus compliqués. Par exemple, dans les piézo-électriques, la polarisation dépend explicitement des tensions à l'intérieur du matériau et peut être induite par une déformation mécanique, même en l'absence de champ.

## 5.3 Relation entre $\bar{P}$ et $\bar{E}$

Si l'on exclut les diélectriques des types (3) et (4),  $\bar{P}$  s'annule lorsque  $\bar{E}$  s'annule. De plus, si le matériau est *isotrope*,  $\bar{P}$  et  $\bar{E}$  sont parallèles et dirigés dans le même sens. Ceci se traduit par la relation

$$\bar{P} = \epsilon_0 \chi(E) \bar{E}, \quad (5.3.45)$$

où la quantité scalaire  $\chi(E)$  est la *susceptibilité électrique* du matériau. Si le matériau n'est pas isotrope,  $\bar{P}$  et  $\bar{E}$  ne sont plus nécessairement parallèles; (5.3.45) se généralise alors, par exemple, en

$$P_k = \epsilon_0 \sum_{\ell} \chi_{k\ell}(E) E_{\ell}, \quad (5.3.46)$$

où  $\chi_{k\ell}$  sont les composantes d'un tenseur. Le déplacement électrique  $\bar{D}$  est donc i) dans un milieu isotrope

$$\bar{D} = \epsilon(E) \bar{E} \quad (5.3.47)$$

$$\epsilon(E) = \epsilon_0 (1 + \chi(E)) \quad (5.3.48)$$

où  $\epsilon$  est la permittivité électrique; ii) dans un matériau électriquement anisotrope,

$$D_k = \sum_{\ell} \epsilon_{k\ell}(E) E_{\ell}, \quad \epsilon_{k\ell} = \epsilon_0 (\delta_{k\ell} + \chi_{k\ell}). \quad (5.3.49)$$

Dans les diélectriques **linéaires**, c-à-d. ceux qui répondent linéairement au champ électrique appliqué, les grandeurs  $\chi$  et  $\epsilon$  sont indépendantes du champ mais variables de point en point; dans des matériaux isotropes et homogènes,  $\chi$  et  $\epsilon$  deviennent des constantes caractéristiques du diélectrique; ce sont des paramètres phénoménologiques qui ne peuvent être calculés qu'au niveau microscopique.

### 5.3.1 Diélectriques linéaires, homogènes et isotropes

Pour de tels matériaux,

$$\bar{P} = \epsilon_0 \chi \bar{E}, \quad \bar{D} = \epsilon_0 (1 + \chi) \bar{E} = \epsilon \bar{E}. \quad (5.3.50)$$

et

$$\kappa = 1 + \chi = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \geq 1 \quad (5.3.51)$$

est la permittivité relative. Les équations du champ sont

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = 0 \quad (5.3.52)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{D} = \rho_{ext} \rightarrow \bar{\nabla} \cdot \bar{E} = \frac{\rho_{ext}}{\epsilon} = \frac{1}{\kappa} \frac{\rho_{ext}}{\epsilon_0}. \quad (5.3.53)$$

Tous les problèmes traités dans un tel milieu se ramènent à ceux traités dans le vide, avec comme seuls changements le remplacement de  $\epsilon_0$  par  $\epsilon$  et le remplacement des sources par les sources extérieures. Il en résulte que le potentiel et le champ produits par des charges extérieures dans le diélectrique sont réduits d'un facteur  $\kappa$  par rapport au potentiel et au champ que ces mêmes charges produiraient dans le vide. Ceci est évidemment causé par la polarisation des molécules qui entourent les charges extérieures, dont le champ s'oppose à celui des charges extérieures (effet d'écran). Une conséquence immédiate est que la capacité d'un condensateur s'accroît d'un facteur  $\kappa$  si le vide entre les conducteurs est remplacé par un diélectrique de permittivité  $\epsilon$ , sans modification des charges sur les conducteurs. Pour un diélectrique de permittivité  $\epsilon$ , qui remplit tout l'espace, l'énergie électrostatique du champ devient

$$W_e = \frac{\epsilon}{2} \int_{R^3} d^3x \bar{E}^2 = \frac{1}{2} \int_{R^3} d^3x \bar{E} \cdot \bar{D}. \quad (5.3.54)$$

et la force exercée par le champ sur la répartition de charges extérieures qui le crée s'écrit

$$F_k = \int_V d^3x \rho_{ext} E_k = \sum_{\ell} \oint_S dS_{\ell} T_{\ell k} \quad (5.3.55)$$

$$T_{\ell k} = D_{\ell} E_k - \frac{1}{2} \delta_{\ell k} \bar{D} \cdot \bar{E} \quad , \quad T_{k\ell} = T_{\ell k}. \quad (5.3.56)$$

## 5.4 Conditions aux limites pour $\bar{D}$ et $\bar{E}$

A la surface  $S$  qui sépare deux milieux diélectriques (de permittivités distinctes), nous devons considérer les conditions aux limites imposées à  $\bar{E}$  et  $\bar{D}$ . Celles-ci s'obtiennent à partir i) du flux du déplacement sortant de la surface d'un petit cylindre infiniment plat à cheval sur la surface:

$$\bar{n} \cdot [\bar{D}_{(1)} - \bar{D}_{(2)}] = \sigma_{ext} \quad (5.4.57)$$

La composante normale du déplacement est donc *discontinue* en passant du milieu (1) au milieu (2) s'il y a des charges extérieures sur  $S$ ; ii) de la circulation du champ électrique le long d'un petit circuit plan, à cheval sur la surface  $S$ :

$$\bar{n} \times [\bar{E}_{(1)} - \bar{E}_{(2)}] = 0 \quad (5.4.58)$$

les composantes tangentielles du champ électrique sont donc *continues*.

## 5.5 Modèle pour la polarisabilité moléculaire

Pour obtenir une estimation du coefficient moléculaire de polarisabilité, nous considérons ici un modèle très simple, dans lequel nous supposons

i) que le diélectrique est constitué de molécules de même nature

ii) que chaque molécule est formée de  $n$  particules ponctuelles de charges  $e_j$  et de masses  $m_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) et qu'elle est électriquement neutre

$$\sum_{j=1}^n e_j = 0 \quad (5.5.59)$$

iii) que le moment dipolaire de la molécule est nul en l'absence de champ extérieur

$$\sum_{j=1}^n e_j \bar{x}'_j = 0 \quad (5.5.60)$$

où  $\bar{x}'_j$  désigne la position d'équilibre de la  $j$ -ième particule, en l'absence de champ

iv) que les charges sont liées entre elles sous l'action d'une force de rappel harmonique telle que si la particule  $j$  est déplacée de  $\bar{x}'_j$  en  $\bar{x}_j$ , elle subit une force de rappel dirigée de  $\bar{x}_j$  vers  $\bar{x}'_j$  et proportionnelle à la longueur du déplacement

$$-m_j \omega_j^2 (\bar{x}_j - \bar{x}'_j) \quad (5.5.61)$$

Nous appliquons à ces molécules un champ électrique extérieur  $\bar{E}$ , statique. Avant d'aller plus avant, nous devons établir une distinction entre le champ qui agit sur les molécules et le champ extérieur. Dans un milieu raréfié (gaz), où les distances intermoléculaires sont grandes, il n'y a que peu de différence entre les deux champs; mais dans un milieu de grande densité (p.ex. dans un liquide), où les molécules sont très proches les unes des autres, la polarisation des molécules voisines crée un champ électrique interne microscopique  $\bar{E}_i$  qui s'ajoute au champ macroscopique. Le champ total qui agit sur une molécule est  $\bar{E}_t = \bar{E} + \bar{E}_i$ .

Ainsi, sous l'action d'un champ électrique extérieur  $\bar{E}$ , la particule  $j$  subit une force électrique  $e_j \bar{E}_t$  qui la déplace de  $\bar{x}'_j$  en la nouvelle position d'équilibre  $\bar{x}_j$ , telle que la somme des forces sur la particule  $j$  est nulle

$$e_j \bar{E}_t(\bar{x}_j) - m_j \omega_j^2 (\bar{x}_j - \bar{x}'_j) = 0. \quad (\text{pas de somme sur } j) \quad (5.5.62)$$

Ainsi est créé, dans la molécule, un moment dipolaire induit

$$\bar{p}_{mol} = \sum_{j=1}^n \bar{p}_j = \sum_{j=1}^n e_j \bar{x}_j = \sum_{j=1}^n e_j (\bar{x}_j - \bar{x}'_j) \quad (5.5.63)$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{e_j^2}{m_j \omega_j^2} \bar{E}_t(\bar{x}_j) = \gamma_{mol} \bar{E}_t(\bar{x}), \quad (5.5.64)$$

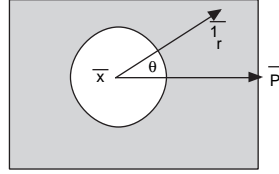
où  $\bar{x}$  est une position "moyenne" de la molécule et

$$\gamma_{mol} = \sum_{j=1}^n \frac{e_j^2}{m_j \omega_j^2}. \quad (5.5.65)$$

La constante  $\gamma_{mol}$  est le *coefficient de polarisabilité* de la molécule. La polarisation par unité de volume qui en résulte est

$$\bar{P}(\bar{x}) = \gamma \bar{E}_t(\bar{x}) \quad (5.5.66)$$

où  $\gamma = N \gamma_{mol}$  si  $N$  désigne le nombre de molécules par unité de volume.



Une approximation, valable dans de nombreux cas, consiste à considérer que le champ  $\bar{E}_i$  en un point  $\bar{x}$  est produit par la répartition des charges de polarisation  $\sigma_P = P_n$  sur la surface d'une cavité sphérique centrée en  $\bar{x}$ , de rayon infiniment petit: dans ces conditions et en tenant compte du fait que  $\bar{n} = -\bar{1}_r$ , il vient

$$\bar{E}_i(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \bar{P}(\bar{x}) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\cos\theta \cos^2\theta = \frac{1}{3\epsilon_0} \bar{P}(\bar{x}). \quad (5.5.67)$$

(5.5.66) devient alors

$$\bar{P} = \gamma [\bar{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \bar{P}]. \quad (5.5.68)$$

D'où, avec  $\bar{P} = \epsilon_0 \chi \bar{E}$ , on tire

$$\epsilon_0 \chi = \frac{3\epsilon_0 \gamma}{3\epsilon_0 - \gamma} \quad (5.5.69)$$

et

$$\frac{\gamma}{3\epsilon_0} = \frac{\chi}{3 + \chi} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0}. \quad (5.5.70)$$

C'est l'équation de CLAUSIUS-MOSSOTTI qui relie la permittivité du diélectrique à la polarisabilité moléculaire. Cette équation est essentiellement valable pour des liquides.

Pour des gaz de très faible densité, on peut pratiquement négliger le champ  $\bar{E}_i$ . (5.5.68) se réduit alors à

$$\bar{P} = \gamma \bar{E} \quad (5.5.71)$$

et (5.5.70) est remplacé par

$$\frac{\gamma}{\epsilon_0} = \chi = \kappa - 1. \quad (5.5.72)$$

## Chapitre 6

# Magnétostatique

Rappelons les équations de la magnétostatique pour une répartition de courants permanents de densité volumique  $\vec{j}$ ,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.0.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (6.0.2)$$

La condition d'intégrabilité de ces équations est

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0; \quad (6.0.3)$$

elle exprime la conservation locale du courant. Intégrée sur un volume  $V$  limité par la surface fermée  $S$ , elle fournit en application du théorème d'Ostrogradsky,

$$0 = \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \oint_S \vec{dS} \cdot \vec{j} \quad (6.0.4)$$

exprimant que le flux total sortant de  $S$  est nul, quelle que soit  $S$  (autrement dit: le flux entrant est égal au flux sortant); donc les lignes de courant (situées à distance finie) ne peuvent avoir ni début, ni fin, elles ne peuvent être que des courbes fermées.

L'intensité  $dI$  du courant à travers  $\vec{dS}$  est le flux de  $\vec{j}$  au travers de  $\vec{dS}$

$$dI = \vec{dS} \cdot \vec{j}. \quad (6.0.5)$$

C'est aussi la quantité de charge électrique qui traverse cette surface, dans le sens du vecteur  $\vec{dS}$ , par unité de temps.

Pour une répartition superficielle de courants permanents, de densité surfacique  $\vec{k}$ , sur  $S$ , l'intensité du courant qui traverse l'élément de ligne  $d\vec{r}$ , dans la direction du vecteur  $\vec{n} \times d\vec{r}$  est

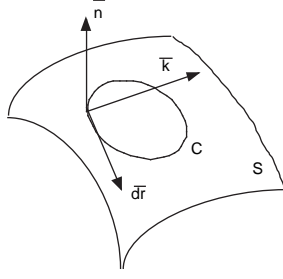
$$dI = \vec{k} \cdot (\vec{n} \times d\vec{r}) = d\vec{r} \cdot (\vec{k} \times \vec{n}) \quad (6.0.6)$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unité normal à  $S$ . La loi de conservation du courant s'exprime ici par

$$\oint_C d\vec{r} \cdot (\vec{k} \times \vec{n}) = 0 \quad (6.0.7)$$

ou, par le théorème de Stokes

$$\int_{\Sigma} \vec{dS} \cdot \vec{\nabla} \times (\vec{k} \times \vec{n}) = 0 \quad (6.0.8)$$



où  $\Sigma$  est une surface quelconque qui s'appuie sur le contour  $C$ .

En choisissant pour  $\Sigma$  la portion de surface que  $C$  découpe sur la surface  $S$ , on obtient la loi de conservation locale

$$\bar{n} \cdot [\bar{\nabla} \times (\bar{k} \times \bar{n})] = 0. \quad (6.0.9)$$

Par exemple, si la surface  $S$  est le plan d'équation  $z = 0$ ,  $\bar{n} = \bar{1}_z$ , (6.0.9) se réduit à

$$\partial_x k_x + \partial_y k_y = 0. \quad (6.0.10)$$

## 6.1 Potentiel vecteur

Comme nous l'avons déjà montré au chapitre 2, l'équation  $\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0$  admet comme solution

$$\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}, \quad (6.1.11)$$

où  $\bar{A}(\bar{x})$  est un champ vectoriel appelé potentiel vecteur. Il n'est défini qu'à un gradient près: en effet,  $\bar{A}$  et

$$\bar{A}' = \bar{A} + \bar{\nabla} f \quad (6.1.12)$$

fournissent le même  $\bar{B}$ , quelle que soit la fonction  $f$ :

$$\bar{B}[\bar{A}'] = \bar{B}[\bar{A}]. \quad (6.1.13)$$

En injectant (6.1.11) dans l'équation avec sources, celle-ci devient

$$\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{A}) = \mu_0 \bar{j} \quad (6.1.14)$$

ou

$$\Delta \bar{A} - \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{A}) = -\mu_0 \bar{j}. \quad (6.1.15)$$

La liberté qui nous est offerte de modifier le potentiel par une transformation de jauge, sans changer la physique, permet de simplifier cette équation vectorielle: en effet, si l'on choisit un potentiel vecteur qui satisfait la condition

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{A} = 0 \quad (6.1.16)$$

appelée *condition de jauge de Coulomb*, cette équation se réduit à

$$\Delta \bar{A} = -\mu_0 \bar{j}. \quad (6.1.17)$$

En coordonnées cartésiennes, (6.1.17) est un système de trois équations séparées pour les trois composantes du potentiel vecteur:

$$\Delta A_x = -\mu_0 j_x \quad (6.1.18)$$

$$\Delta A_y = -\mu_0 j_y \quad (6.1.19)$$

$$\Delta A_z = -\mu_0 j_z. \quad (6.1.20)$$

Chacune de ces équations est une équation de Poisson. Tous les théorèmes assurant l'unicité de la solution développés dans le cadre de l'électrostatique restent applicables ici. Ainsi, par exemple, si la distribution de courants est localisée dans un volume  $V$  borné de l'espace, la solution qui s'annule à l'infini, au moins comme  $|\bar{x}|^{-1}$  est unique et donnée par

$$\bar{A}(\bar{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\bar{j}(\bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|}. \quad (6.1.21)$$

On vérifiera, comme exercice, que ce potentiel satisfait bien la condition de jauge de Coulomb, en vertu de la conservation locale du courant  $\bar{\nabla} \cdot \bar{j}(\bar{x}') = 0$ .

**Remarque 6.1.** *En coordonnées sphériques ou cylindriques, malgré la condition de jauge de Coulomb, les équations (6.1.17) restent des équations couplées pour les composantes du potentiel. Le lecteur est invité à les écrire explicitement en coordonnées cylindriques, par exemple.*

Le potentiel vecteur produit par une distribution surfacique de courant est donné par

$$\bar{A}(\bar{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S dS' \frac{\bar{k}(\bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|}. \quad (6.1.22)$$

Le potentiel produit par une boucle  $C$  parcourue par un courant d'intensité  $I$  est

$$\bar{A}(\bar{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\bar{r}'}{|\bar{x} - \bar{x}'|}. \quad (6.1.23)$$

## 6.2 Induction magnétique et Loi de Biot-Savart

En prenant le rotationnel de l'expression (6.1.21), on obtient l'induction magnétique  $\bar{B}$  en fonction de la répartition de courants:

$$B_x(\bar{x}) = \partial_y A_z - \partial_z A_y \quad (6.2.24)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' [j_z(\bar{x}') \partial_y \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} - j_y(\bar{x}') \partial_z \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|}] \quad (6.2.25)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' [-j_z(\bar{x}') \frac{(y - y')}{|\bar{x} - \bar{x}'|^3} + j_y(\bar{x}') \frac{(z - z')}{|\bar{x} - \bar{x}'|^3}] \quad (6.2.26)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \left[ \frac{\bar{j}(\bar{x}') \times (\bar{x} - \bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|^3} \right]_x \quad (6.2.27)$$

ou

$$\bar{B}(\bar{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\bar{j}(\bar{x}') \times (\bar{x} - \bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|^3}. \quad (6.2.28)$$

L'induction produite par une distribution surfacique de courant sur  $S$  est donnée par

$$\bar{B}(\bar{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S dS' \frac{\bar{k}(\bar{x}') \times (\bar{x} - \bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|^3}. \quad (6.2.29)$$

Pour une boucle  $C$  parcourue par un courant d'intensité  $I$ , l'induction vaut

$$\bar{B}(\bar{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\bar{r}' \times (\bar{x} - \bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|^3}. \quad (6.2.30)$$

C'est la loi de BIOT et SAVART.

### 6.3 Conditions aux limites pour $\bar{B}$

Rappelons les résultats obtenus au chapitre 2: soit  $\Sigma$  une portion de surface sur laquelle circulent des courants permanents superficiels de densité  $\bar{k}(\bar{x})$ .

i) *la composante normale de  $\bar{B}$  est continue au passage de  $\Sigma$*

$$\bar{n} \cdot (\bar{B}_{(1)} - \bar{B}_{(2)}) = 0 \quad (6.3.31)$$

ii) *S'il y a des courants de surface, les composantes tangentielles de  $\bar{B}$  sont discontinues au passage de  $\Sigma$*

$$\bar{n} \times [\bar{B}_{(1)} - \bar{B}_{(2)}] = \mu_0 \bar{k}. \quad (6.3.32)$$

### 6.4 Développement multipolaire du potentiel vecteur

Si la densité de courant  $\bar{j}$  est localisée dans un volume  $V$  borné de l'espace  $R^3$ , on peut, comme dans le cas de l'électrostatique, étudier le comportement du potentiel vecteur pour  $|\bar{x}|$  grand par rapport aux dimensions de  $V$ , c'est-à-dire, pour  $|\bar{x}| \gg \gg |\bar{x}'|$  où  $\bar{x}'$  désigne un point courant dans  $V$ .

A cet effet, on remplace dans (6.1.21) la fonction  $\frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|}$  par son développement en série de Taylor

$$\frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} = \frac{1}{|\bar{x}|} - \sum_k x'^k \partial_k \frac{1}{|\bar{x}|} + \dots \quad (6.4.33)$$

$$= \frac{1}{|\bar{x}|} + (\bar{x} \cdot \bar{x}') \frac{1}{|\bar{x}|^3} + \dots \quad (6.4.34)$$

La  $k$ -ième composante du potentiel devient ainsi

$$A_k(\bar{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{1}{|\bar{x}|} \int_V d^3x' j_k(\bar{x}') + \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|^3} \cdot \int_V d^3x' \bar{x}' j_k(\bar{x}') + \dots \right] \quad (6.4.35)$$

Le terme en  $\frac{1}{|\bar{x}|}$  dans le membre de droite de (6.4.35), analogue du monopôle électrique  $Q$ , est nul, *il n'y a pas de monopôle magnétique!* Pour le montrer, considérons

$$\bar{\nabla}' \cdot [x'^k \bar{j}(\bar{x}')] = j^k(\bar{x}') + x'^k \bar{\nabla}' \cdot \bar{j}(\bar{x}') = j^k(\bar{x}') \quad (6.4.36)$$



en vertu de la conservation du courant; donc

$$\int_V d^3x' j^k(\bar{x}') = \int_V d^3x' \nabla' \cdot [x'^k \bar{j}(\bar{x}')] = \oint_S \overline{dS'} \cdot [x'^k \bar{j}(\bar{x}')] = 0 \quad (6.4.37)$$

car  $\bar{j}$  est une densité volumique, nulle sur  $S$ .

Pour évaluer le deuxième terme du membre de droite de (6.4.35), il est utile de considérer

$$\nabla' \cdot [x'^k x'^m \bar{j}(\bar{x}')] = x'^m j^k(\bar{x}') + x'^k j^m(\bar{x}') + x'^k x'^m \nabla' \cdot \bar{j}(\bar{x}') \quad (6.4.38)$$

$$= x'^m j^k(\bar{x}') + x'^k j^m(\bar{x}'). \quad (6.4.39)$$

En intégrant cette divergence sur le volume  $V$  puis en la transformant en une intégrale de surface, puisque  $\bar{j}$  est nul sur  $S$ , il vient

$$\int_V d^3x' x'^m j^k(\bar{x}') + x'^k j^m(\bar{x}') = 0 \quad (6.4.40)$$

Il en résulte que

$$\int_V d^3x' x'^m j^k(\bar{x}') = \int_V d^3x' \left\{ \frac{1}{2} [x'^m j^k + x'^k j^m] + \frac{1}{2} [x'^m j^k - x'^k j^m] \right\} \quad (6.4.41)$$

$$= \int_V d^3x' \left\{ \frac{1}{2} [x'^m j^k - x'^k j^m] \right\} \quad (6.4.42)$$

donc aussi que

$$\int_V d^3x' (\bar{x} \cdot \bar{x}') j^k = \frac{1}{2} \left[ \int_V d^3x' \{ (\bar{x} \cdot \bar{x}') j^k - (\bar{x} \cdot \bar{j}) x'^k \} \right] \quad (6.4.43)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_V d^3x' [\bar{x} \times (\bar{x}' \times \bar{j}(\bar{x}'))]^k \quad (6.4.44)$$

ou

$$\int_V d^3x' (\bar{x} \cdot \bar{x}') \bar{j}(\bar{x}') = -\frac{1}{2} \int_V d^3x' [\bar{x} \times (\bar{x}' \times \bar{j}(\bar{x}'))]. \quad (6.4.45)$$

On définit le *moment dipolaire magnétique* de la distribution de courants  $\bar{j}$  par

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2} \int_V d^3x' (\bar{x}' \times \bar{j}(\bar{x}')) = \int_V d^3x' \bar{M}(\bar{x}') \quad (6.4.46)$$

où  $\bar{M}$  est l'*aimantation ou densité de moment magnétique*

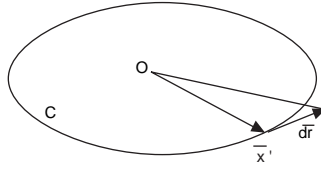
$$\bar{M}(\bar{x}) = \frac{1}{2} (\bar{x} \times \bar{j}(\bar{x})). \quad (6.4.47)$$

La contribution dominante du membre de droite de (6.4.35) est donc celle d'un dipôle magnétique à l'origine

$$\bar{A}_{dip}(\bar{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\bar{\mu} \times \bar{x}}{|\bar{x}|^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \bar{\mu} \times \nabla \frac{1}{|\bar{x}|}. \quad (6.4.48)$$

L'induction magnétique correspondante est

$$\bar{B}_{dip}(\bar{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\bar{n}(\bar{n} \cdot \bar{\mu}) - \bar{\mu}}{|\bar{x}|^3} \quad (6.4.49)$$



### 6.4.1 Exemples

1) Le moment magnétique d'une boucle  $C$ , circulaire, de rayon  $a$ , dans le plan  $z = 0$ , parcourue par un courant d'intensité  $I$  est donné par

$$\bar{\mu} = \frac{I}{2} \oint_C \bar{x}' \times d\bar{r}' = \bar{1}_z \pi a^2 I = \bar{1}_z I A, \quad (6.4.50)$$

où  $A$  est l'aire du cercle limité par la boucle.

2) Si  $\bar{j}(\bar{x}')$  est la densité de courant en  $\bar{x}'$  produite par une particule ponctuelle de masse  $m$ , de charge  $Q$ , dont la trajectoire a pour équation  $\bar{x} = \bar{x}(t)$  et dont la vitesse est  $\bar{v}(t) = d\bar{x}/dt$ ,

$$\bar{j}(\bar{x}') = Q \bar{v} \delta^3(\bar{x}' - \bar{x}), \quad (6.4.51)$$

son moment magnétique est donné par

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2} \int_{R^3} d^3x' \bar{x}' \times \bar{j}(\bar{x}') = \frac{Q}{2} \bar{x} \times \bar{v} = \frac{Q}{2m} \bar{x} \times \bar{p} = \frac{Q}{2m} \bar{L} \quad (6.4.52)$$

où  $\bar{p} = m \bar{v}$  est l'impulsion de la particule et  $\bar{L} = \bar{x} \times \bar{p}$  son moment cinétique orbital.

## 6.5 Force exercée par un courant sur un courant

### 6.5.1 Force de Laplace

Un élément de charge  $\delta q$  en mouvement, à la vitesse  $\bar{v}$ , dans un champ magnétique extérieur subit une force donnée par

$$\delta \bar{F} = \delta q \bar{v} \times \bar{B}. \quad (6.5.53)$$

Cette force, appelée force de Laplace, peut prendre des formes diverses en fonction de la distribution de courant: par exemple,

- si  $\delta q = \rho d^3x$ , avec  $\bar{j} = \rho \bar{v}$ ,

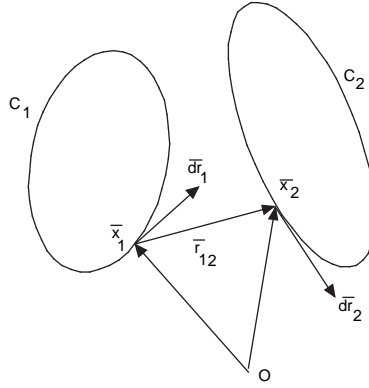
$$\delta \bar{F} = d^3x \rho \bar{v} \times \bar{B} = d^3x \bar{j} \times \bar{B}; \quad (6.5.54)$$

- si  $\delta q = \sigma dS$ , avec  $\bar{k} = \sigma \bar{v}$ ,

$$\delta \bar{F} = dS \sigma \bar{v} \times \bar{B} = dS \bar{k} \times \bar{B}; \quad (6.5.55)$$

- si  $\delta q = I dt$ ,

$$\delta \bar{F} = I dt \frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{B} = I d\bar{r} \times \bar{B}. \quad (6.5.56)$$



### 6.5.2 Loi d'Ampère

Considérons deux boucles,  $C_1$  et  $C_2$ , parcourues par des courants permanents d'intensités respectives  $I_1$  et  $I_2$ . Calculons la force exercée par la boucle  $C_1$  sur la boucle  $C_2$ .

$C_1$  produit en  $\bar{x}$  une induction magnétique

$$\bar{B}_1(\bar{x}) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\bar{r}_1 \times (\bar{x} - \bar{x}_1)}{|\bar{x} - \bar{x}_1|^3}. \quad (6.5.57)$$

L'élément de courant  $I_2 d\bar{r}_2$  en  $\bar{x}_2$  subit la force de Laplace  $\delta\bar{F}_2(\bar{x}_2) = I_2 d\bar{r}_2 \times \bar{B}_1(\bar{x}_2)$ . La force totale exercée par  $C_1$  sur  $C_2$  est donc

$$\bar{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} d\bar{r}_2 \times \left[ \oint_{C_1} \frac{d\bar{r}_1 \times (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)}{|\bar{x}_2 - \bar{x}_1|^3} \right] \quad (6.5.58)$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\bar{r}_2 \times [d\bar{r}_1 \times (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)]}{|\bar{x}_2 - \bar{x}_1|^3} \quad (6.5.59)$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\bar{r}_2 \times [d\bar{r}_1 \times \bar{r}_{21}]}{|\bar{r}_{21}|^3} \quad (6.5.60)$$

où  $\bar{r}_{21} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$ . Cette loi d'Ampère est, pour les courants permanents, l'analogie de la loi de Coulomb.

En utilisant, dans la dernière intégrale, la formule d'expulsion

$$\bar{A} \times [\bar{B} \times \bar{C}] = (\bar{A} \cdot \bar{C}) \bar{B} - (\bar{A} \cdot \bar{B}) \bar{C}, \quad (6.5.61)$$

cette force se met encore sous la forme

$$\bar{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{(d\bar{r}_2 \cdot \bar{r}_{21}) d\bar{r}_1 - (d\bar{r}_2 \cdot d\bar{r}_1) \bar{r}_{21}}{|\bar{r}_{21}|^3} \quad (6.5.62)$$

$$= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{(d\bar{r}_2 \cdot d\bar{r}_1) \bar{r}_{21}}{|\bar{r}_{21}|^3}, \quad (6.5.63)$$

l'autre intégrale est nulle car c'est l'intégrale d'une différentielle sur une boucle fermée

$$\oint_{C_2} d\bar{r}_2 \cdot \frac{\bar{r}_{21}}{|\bar{r}_{21}|^3} = -\oint_{C_2} d\bar{r}_2 \cdot \nabla_2 \frac{1}{|\bar{r}_{21}|} = 0. \quad (6.5.64)$$

Puisque  $\bar{r}_{21} = -\bar{r}_{12}$ ,  $\bar{F}_2 = -\bar{F}_1$ .

## 6.6 Energie magnétique

### 6.6.1 Force et Energie potentielle

Soit  $\bar{j}$  une répartition continue dans le volume  $V$  borné. Soit  $\bar{B}$  un champ magnétique extérieur supposé lentement variable dans  $V$ . En choisissant judicieusement l'origine des coordonnées en un point de  $V$ , on a, pour chaque composante de  $\bar{B}$ :

$$B^k(\bar{x}) = [B^k(0) + x^\ell \partial_\ell B^k(0) + \dots] \quad (6.6.65)$$

En injectant ce développement dans l'expression de la force que  $\bar{B}$  exerce sur la répartition de courants

$$\bar{F} = \int_V d^3x \bar{j}(\bar{x}) \times \bar{B}(\bar{x}) \quad (6.6.66)$$

il vient

$$F_i = \epsilon_{ijk} \int_V d^3x j^j(\bar{x}) [B^k(0) + x^\ell \partial_\ell B^k(0) + \dots] \quad (6.6.67)$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int_V d^3x [j^j(\bar{x}) x^\ell - j^\ell x^j] \partial_\ell B^k(0) + \dots \quad (6.6.68)$$

$$= \epsilon_{ijk} \epsilon^{\ell jm} \mu_m \partial_\ell B^k(0) + \dots = [\delta_i^\ell \delta_k^m - \delta_i^m \delta_k^\ell] \mu_m \partial_\ell B^k(0) + \dots \quad (6.6.69)$$

$$= \mu_k \partial_i B^k(0) - \mu_i \partial_k B^k(0) + \dots \quad (6.6.70)$$

On a utilisé, pour passer de la première à la deuxième ligne, le fait que l'intégrale de volume de la densité de courants est nulle et, pour obtenir la dernière ligne, que  $\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0$ . La contribution dominante à la force vaut donc

$$\bar{F} = \bar{\nabla}(\bar{\mu} \cdot \bar{B})|_0 + \dots \quad (6.6.71)$$

La force exercée sur un dipôle est égale à  $\bar{F} = -\bar{\nabla}(-\bar{\mu} \cdot \bar{B})$ .

Pour un *dipôle permanent*, on peut définir l'énergie potentielle magnétique comme

$$U = -\bar{\mu} \cdot \bar{B} \quad (6.6.72)$$

elle est minimale lorsque  $\bar{\mu} \parallel \bar{B}$ .

**Remarque 6.2.** Pour un dipôle non permanent,  $U$  ne représente pas son énergie totale. Car, pour amener le dipôle (petit courant fermé) dans le champ  $\bar{B}$ , un travail doit être fourni pour maintenir constant le courant  $\bar{j}$  dans la boucle.

### 6.6.2 Energie magnétique de circuits

La création d'une distribution de courants stationnaires et du champ magnétique qui lui est associé comporte une période transitoire pendant laquelle les courants et les champs passent de la valeur zéro à leur valeur finale. Dans cet intervalle de temps, les champs varient et induisent des forces électromotrices contre lesquelles les sources du champ doivent fournir un travail. Puisque l'énergie du champ est, par définition, le travail total fourni pour créer ce champ, il faut prendre en compte ces contributions.

Supposons d'abord que nous n'ayons qu'un seul circuit parcouru par un courant d'intensité  $I$ . Si le flux au travers du circuit change, la force électromotrice induite est donnée par la loi de Faraday  $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$ . Pour maintenir le courant constant, les sources du courant (par exemple une batterie) doivent fournir un travail. Si  $\mathcal{E}_0$  est la f.é.m. de la source (batterie), le courant qui circule dans le circuit est donné par

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E} = I R \quad (6.6.73)$$

où  $\mathcal{E}$  est la f.é.m. induite et  $R$  la résistance du circuit. Le travail à fournir par la batterie pour transporter l'élément de charge  $dq = I dt$  d'une extrémité à l'autre du circuit est

$$dq \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{E}_0 = dq \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0 I dt = -\mathcal{E} I dt + I^2 R dt \quad (6.6.74)$$

$$= I d\Phi + I^2 R dt. \quad (6.6.75)$$

La quantité  $I^2 R dt$  représente l'énergie convertie en chaleur et ne doit pas être incluse dans l'énergie magnétique. Donc, si  $d\Phi$  est la variation du flux au travers du circuit parcouru par le courant  $I$ , l'énergie magnétique conférée au circuit est

$$dW_m = I d\Phi. \quad (6.6.76)$$

S'il y a  $n$  circuits rigides  $\{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n\}$ , parcourus par des courants d'intensité  $I_1, I_2, \dots, I_n$ , les variations de flux  $d\Phi_1, d\Phi_2, \dots, d\Phi_n$  obligent les sources à fournir un travail donné par

$$dW_m = \sum_{j=1}^n I_j d\Phi_j. \quad (6.6.77)$$

Considérons à présent le travail à fournir pour créer cette distribution stationnaire de courants et de champs. L'énergie magnétique  $W_m$  peut se calculer en intégrant (6.6.77) de l'état initial où tous les courants sont nuls ( $I_j = 0$ ), à l'état final où les intensités sont respectivement  $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ . L'énergie magnétique ne dépend pas de la manière dont la répartition est réalisée. On peut donc choisir de la réaliser en variant simultanément tous les flux. Soit  $a \in [0, 1]$  un paramètre caractérisant un état intermédiaire du système où les intensités sont  $I_j(a) = a I_j$ , l'induction  $\vec{B}(a) = a \vec{B}$  et les flux

$$\Phi_j(a) = \int_{\Sigma_j} \vec{dS} \cdot (a \vec{B}) = a \Phi_j \quad (6.6.78)$$

Le travail fourni contre les fém induites par les variations de tous les flux  $d\Phi_j = da \Phi_j$ , est donné par

$$dW_m(a) = \sum_{k=1}^n a I_k da \Phi_k; \quad (6.6.79)$$

le travail total est égal à

$$W_m = \int_0^1 da a \sum_{k=1}^n I_k \Phi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Phi_k \quad (6.6.80)$$

où

$$\Phi_k = \int_{\Sigma_k} \vec{dS} \cdot \vec{B} = \oint_{\ell_k} d\vec{r} \cdot \vec{A}. \quad (6.6.81)$$

$\vec{A}$  (resp.  $\vec{B}$ ) est le potentiel (resp. l'induction) produit par l'ensemble des courants.

## Self-inductance, inductance mutuelle

En utilisant (6.1.23), on peut récrire le flux d'induction magnétique au travers de la boucle  $\ell_k$  comme

$$\Phi_k = \sum_{j=1}^n \oint_{\ell_k} d\vec{r} \cdot \vec{A}_j \quad (6.6.82)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{j=1}^n I_j \oint_{\ell_k} \oint_{\ell_j} \frac{d\vec{r} \cdot d\vec{r}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (6.6.83)$$

où  $\vec{A}_j$  désigne le potentiel produit par le courant dans la boucle  $\ell_j$ . L'énergie (6.6.80) peut donc aussi s'exprimer comme

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n M_{kj} I_k I_j \quad (6.6.84)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n L_j I_j^2 + \sum_{k=1}^n \sum_{j>k}^n M_{kj} I_k I_j \quad (6.6.85)$$

avec

$$L_j = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\ell_j} \oint_{\ell_j} \frac{d\vec{r} \cdot d\vec{r}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (6.6.86)$$

$$M_{kj} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\ell_k} \oint_{\ell_j} \frac{d\vec{r} \cdot d\vec{r}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (6.6.87)$$

$L_j = M_{jj}$  est la self-inductance du  $j$ -ième circuit,  $M_{kj}$  est l'inductance mutuelle des circuits  $k$  et  $j$ .  $M_{kj} = M_{jk}$ . Comme pour les capacités, ces coefficients ne dépendent que de la géométrie des circuits.

### 6.6.3 Energie d'une répartition volumique de courants

Pour une répartition continue de courants en volume,  $\vec{j}$  dans  $V$ , l'énergie magnétique (6.6.80) prend la forme

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V d^3x \vec{j}(\vec{x}) \cdot \vec{A}(\vec{x}) \quad (6.6.88)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{R^3} d^3x \vec{j}(\vec{x}) \cdot \vec{A}(\vec{x}). \quad (6.6.89)$$

Dans la dernière expression, l'intégrale a été étendue à tout l'espace; cela ne change rien ici puisque la répartition est nulle en dehors de  $V$ .

### 6.6.4 Energie magnétique; densité d'énergie magnétique

En utilisant l'équation  $\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{j}$ , pour éliminer  $\bar{j}$  de (6.6.89), puis en intégrant par parties, il vient

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_{R^3} d^3x (\nabla \times \bar{B}) \cdot \bar{A} \quad (6.6.90)$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \int_{R^3} d^3x [\nabla \cdot (\bar{B} \times \bar{A}) + \bar{B}^2] \quad (6.6.91)$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \int_{R^3} d^3x \bar{B}^2. \quad (6.6.92)$$

L'intégrale de la divergence dans la deuxième expression devient par Ostrogradsky l'intégrale sur la sphère de rayon infini

$$\oint_{S_\infty} \bar{dS} \cdot (\bar{B} \times \bar{A}), \quad (6.6.93)$$

or, l'élément de surface est proportionnel à  $R^2$ , le potentiel décroît à grande distance comme  $R^{-2}$  et l'induction décroît comme  $R^{-3}$ , cette intégrale est donc nulle à la limite  $R \rightarrow \infty$ . Sous la forme (6.6.92), l'énergie est attribuée au champ; comme dans le cas électrostatique, elle est définie positive.

La *densité d'énergie magnétique* du champ est définie par

$$w_m = \frac{1}{2\mu_0} \bar{B}^2. \quad (6.6.94)$$

## 6.7 Tensions magnétostatiques [2]

Intéressons-nous au calcul de la force exercée par un champ magnétique sur la répartition de courants contenue dans le volume  $V$ :

$$\bar{F} = \int_V d^3x \bar{j}(\bar{x}) \times \bar{B}(\bar{x}). \quad (6.7.95)$$

En coordonnées cartésiennes, la  $k$ -ième composante de cette force est égale à

$$F_k = \int_V d^3x \sum_{\ell, m} \epsilon_{k\ell m} j_\ell B_m \quad (6.7.96)$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \int_V d^3x \sum_{\ell, m} \epsilon_{k\ell m} (\bar{\nabla} \times \bar{B})_\ell B_m \quad (6.7.97)$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \int_V d^3x \sum_{\ell, m} \epsilon_{k\ell m} \sum_{pq} \epsilon^{\ell pq} (\partial_p B_q) B_m \quad (6.7.98)$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \int_V d^3x \sum_m (-\partial_k B_m + \partial_m B_k) B_m \quad (6.7.99)$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \int_V d^3x \sum_m [\partial_m (B_k B_m) - B_k (\partial_m B_m) - \frac{1}{2} \partial_k (B_m B_m)] \quad (6.7.100)$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \int_V d^3x \sum_m \partial_m [(B_k B_m) - \frac{1}{2} \delta_{km} \bar{B}^2] \quad (6.7.101)$$

$$= \int_V d^3x \sum_m \partial_m T_{km}^{(m)} \quad (6.7.102)$$

$$= \sum_m \oint_S dS_m T_{km}^{(m)} \quad (6.7.103)$$

où

$$T_{km}^{(m)} = T_{mk}^{(m)} = \frac{1}{\mu_0} [B_k B_m - \frac{1}{2} \delta_{km} \bar{B}^2] \quad (6.7.104)$$

sont les composantes du *tenseur des tensions magnétostatiques* de Maxwell. Comme dans le cas électrostatique, la densité volumique de force est égale à la divergence du tenseur des tensions; par le théorème de la divergence, la force totale exercée sur les courants dans le volume  $V$  peut être entièrement caractérisée par la valeur du tenseur des tensions sur la surface  $S$  qui limite le volume.

Dans le calcul précédent, nous avons utilisé les équations de Maxwell

$$\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \bar{j} \quad (6.7.105)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = \sum_m \partial_m B_m = 0 \quad (6.7.106)$$

ainsi que l'identité suivante pour les symboles de Levi-Civita

$$\sum_{\ell=1}^3 \epsilon_{k\ell m} \epsilon^{\ell pq} = -\delta_k^p \delta_m^q + \delta_k^q \delta_m^p. \quad (6.7.107)$$



# Chapitre 7

## Les sources du champ magnétique

### 7.1 Classification des courants

Les sources du champ magnétique sont les courants  $\vec{j}$ , comme les sources du champ électrique sont les charges  $\rho$ . Pour les charges, on a été amené à distinguer les charges "libres" et les charges "liées": cette distinction se manifeste clairement par la différence de comportement macroscopique des conducteurs et des diélectriques. Pour les courants, on est aussi amené à distinguer plusieurs catégories [4]: les courants de charges libres, les courants de polarisation (dus aux mouvements des charges de polarisation), les courants moléculaires (ou d'aimantation) et les courants de déplacement (qui seront introduits plus tard).

Sous l'effet d'un champ électrique, les charges libres sont accélérées et se déplacent sur des distances grandes par rapport aux dimensions atomiques; les charges liées sont aussi accélérées par le champ mais elles subissent une intense force de rappel moléculaire: elles ne peuvent se déplacer que sur des distances de l'ordre des dimensions atomiques autour de leur position d'équilibre. Le courant de polarisation représente ces mouvements à l'échelle moléculaire.

Pour comprendre le magnétisme, à l'échelle moléculaire, on doit tenir compte du fait que les charges qui constituent les atomes et les molécules sont en perpétuel mouvement; pour faire une description simple d'une molécule il faut se donner la distribution de charge et le courant moléculaire effectif.

#### 7.1.1 Courants de charges libres

On distingue généralement deux types de courants, chargés ou non: les courants de convection caractérisés par un déplacement global de matière et les autres courants dits de diffusion ou de conduction, dus à une non uniformité de potentiel électrique, de densité de particules, de température, etc.

## Les courants de convection

### a) *Courants dans le vide*

Soumise à une perturbation extérieure (champ électrique, température), la matière peut émettre des particules chargées (électrons ou ions). Cette émission se produit parfois spontanément, comme en radioactivité  $\alpha$  où des noyaux lourds perdent, sans contrainte extérieure, des noyaux d'hélium; les faisceaux de particules peuvent alors être accélérés, déviés, focalisés, ce qui est utilisé dans de nombreux dispositifs ( canons à électrons pour oscilloscopes, tubes de télévision, microscopes électroniques, diodes à vide, accélérateurs de particules). En raison de la forte absorption des particules par la matière, ces courants sont généralement créés dans un vide poussé ( $10^{-10} Pa$  dans un microscope électronique à effet de champ).

### b) *Courants de convection par déplacement d'ensemble*

Un ensemble de charges, fixées sur un support isolant en mouvement constitue un autre ensemble de courant de convection. Un tel courant se trouve à la base du fonctionnement du générateur de van de Graaff, par exemple. Si l'ensemble de charges est neutre (ce qui est le cas des circuits électriques en mouvement), ce courant de convection est nul.

### c) *Courants de convection par la pesanteur*

L'action de la pesanteur sur des gouttelettes de liquide électrisées peut produire des courants de convection (pluies atmosphériques). Rappelons que c'est par l'étude du mouvement de gouttelettes d'huile électrisées, sous l'action combinée du champ de pesanteur et d'un champ électrique uniforme, que Millikan a déterminé en 1913 la valeur de la charge de l'électron avec une précision de l'ordre de 0.1% .

## Les courants de conduction et de diffusion

a) *La conduction électrique* est liée au gradient du potentiel électrique. Dans de très nombreux cas, pour des champs électriques faibles, le courant volumique obéit à la loi d'Ohm

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (7.1.1)$$

le milieu peut être caractérisé par sa *conductivité électrique*  $\sigma$ . Ce type de courant est utilisé en pratique pour le transport de l'énergie électrique. Il peut exister dans des milieux matériels solides, liquides ou gazeux, seule diffère la nature des porteurs de charges en mouvement (électrons dans les solides, ions dans les électrolytes, électrons et ions dans les gaz et les plasmas). Dans tous les cas, c'est l'interaction des porteurs mobiles avec le milieu qui est à l'origine de la loi d'Ohm (voir par exemple ci-dessous)

b) *La diffusion électrique* est due à un gradient de concentration; ces courants de diffusion jouent un rôle important dans le fonctionnement des piles électrochimiques et des jonctions entre deux solides différents ( diodes et transistors à semi-conducteurs). Noter qu'un gradient de température dans un milieu matériel peut aussi produire un courant de type thermoélectrique.

### 7.1.2 Modèle de Drude pour la conductivité

Dans un conducteur, les charges mobiles interagissent entre elles et avec les charges fixes qui composent le matériau. Dans le modèle de Drude, l'action du milieu sur les

charges mobiles de densité  $\rho$ , de masse volumique  $\mu$ , dans l'élément de volume  $dv$  est décrite par une force effective de friction proportionnelle à la vitesse  $\bar{v}$

$$d\bar{F} = -\alpha \bar{v} dv, \quad \text{avec } \alpha > 0. \quad (7.1.2)$$

Si l'on admet que le mouvement est provoqué par un champ électrique macroscopique constant  $\bar{E}$  à l'intérieur du milieu, la loi de Newton s'écrit

$$\mu dv \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho \bar{E} dv - \alpha \bar{v} dv \quad (7.1.3)$$

ou

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{q\bar{E}}{m} - \frac{\alpha\bar{v}}{Nm} \quad (7.1.4)$$

en introduisant

$$\mu = Nm, \quad \rho = Nq \quad (7.1.5)$$

où  $m, q$  sont la masse et la charge des porteurs,  $N$  est le nombre de porteurs par unité de volume. Avec le paramètre  $\tau = \frac{m}{\alpha}$ , appelé *temps de relaxation* des vitesses, l'équation (7.1.4) prend la forme

$$\frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{\bar{v}}{\tau} = \frac{q\bar{E}}{m} \quad (7.1.6)$$

et admet pour solution

$$\bar{v}(t) = \bar{v}_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{q\tau\bar{E}}{m} \quad (7.1.7)$$

somme d'un terme transitoire et d'un terme permanent. Après un temps de quelques valeurs de  $\tau$ , le terme transitoire disparaît et la vitesse tend vers une valeur constante proportionnelle au champ électrique. Il s'établit donc un courant stationnaire de densité

$$\bar{j} = \rho \bar{v} = N \frac{q^2 \tau \bar{E}}{m} = \sigma \bar{E}, \quad (7.1.8)$$

proportionnel au champ électrique et  $\sigma = N \frac{q^2 \tau}{m}$ .

### 7.1.3 Courants moléculaires et propriétés magnétiques de la matière

Chaque atome ou molécule est le siège de mouvements intra-moléculaires complexes de ses constituants chargés (noyaux et électrons); ceux-ci donnent naissance à des courants atomiques effectifs qu'on peut tenter de relier à la structure moléculaire. Cette relation ne peut cependant être vraiment comprise que par la mécanique quantique. Nous devons nous limiter ici à donner quelques indications qualitatives.

Un électron atomique possède un moment cinétique orbital  $\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p}$  et un moment magnétique orbital  $\bar{\mu}_L = \frac{e}{2m} \bar{L}$ . Il a en plus un moment magnétique intrinsèque proportionnel à son **spin**  $\bar{S} = \frac{\hbar}{2} \bar{\sigma}$ ,  $\bar{\mu}_S = 2 \frac{e}{2m} \bar{S}$  [ $\hbar$  est la constante de Planck]. Le moment magnétique total effectif qui mesure l'interaction de l'atome avec un champ magnétique extérieur combine les contributions orbitales et spinorielles par les règles de la mécanique quantique. On trouve

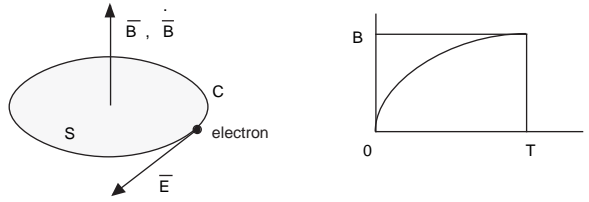
$$\bar{\mu} = g \frac{e}{2m} (\bar{L} + \bar{S}) \quad (7.1.9)$$

$g$  est le facteur de LANDÉ, calculable en M.Q. Les protons et les neutrons ont aussi un moment magnétique orbital et un spin. Tous ces moments magnétiques peuvent créer des champs dipolaires rapidement variables à l'échelle atomique ou moléculaire.

Dans la plupart des substances [à l'exclusion des substances ferromagnétiques que nous ne traiterons pas], en l'absence de champ magnétique extérieur, les courants atomiques ou moléculaires sont soit nuls, soit nuls en moyenne du fait de leurs orientations arbitraires.

### Loi de Lenz et Diamagnétisme

Que se passe-t-il, au niveau microscopique, pendant l'allumage du champ  $\vec{B}$ ?



Pour répondre à cette question, considérons un petit modèle: assimilons la trajectoire d'un électron à un petit courant fermé  $C$  circulaire, plan, de rayon  $r$ , dans le plan  $xy$ . Dans l'intervalle de temps  $T$  où  $\vec{B} = B \vec{1}_z$  passe de la valeur  $B(0) = 0$  à la valeur  $B(T) = B$ , en vertu de la loi de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, \quad (7.1.10)$$

il apparaît un champ électrique induit: la fém induite, égale au flux de (7.1.10) au travers de la surface plane  $S$  délimitée par l'orbite  $C$  de l'électron, vaut

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{E} = \mathcal{E} = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d}{dt} \int_S d\vec{S} \cdot \vec{B} \quad (7.1.11)$$

on en tire que

$$2\pi r E = -\pi r^2 \dot{B}. \quad (7.1.12)$$

L'électron (de charge électrique  $e$ ) subit donc une accélération tangentielle donnée par

$$m \dot{v} = e E = -\frac{er \dot{B}}{2}. \quad (7.1.13)$$

En intégrant les deux membres sur l'intervalle de temps  $T$ , on obtient l'accroissement de la vitesse de l'électron

$$\Delta v = v(T) - v(0) = -\frac{er}{2m} [B(T) - B(0)] = -\frac{er}{2m} B. \quad (7.1.14)$$

Il en résulte une variation de l'intensité du courant effectif égale à la quantité de charge électrique qui passe, en une seconde, par un point de l'orbite, soit

$$\Delta I = e \frac{\Delta v}{2\pi r} = -\frac{e^2}{4\pi m} B \quad (7.1.15)$$

d'où aussi un moment magnétique induit

$$\Delta\mu = \pi r^2 \Delta I = -\frac{e^2 r^2}{4m} B \quad (7.1.16)$$

proportionnel à  $B$  et dirigé en sens opposé (loi de Lenz). En additionnant ces effets pour tous les électrons d'une molécule on trouve donc un moment dipolaire moléculaire induit

$$\bar{\mu}' = -\alpha_{mol} \bar{B}, \quad (7.1.17)$$

$\alpha_{mol} > 0$  est l'analogie de la polarisabilité moléculaire électrique. En prenant en compte toutes les molécules présentes dans un volume unité, on en déduit l'existence d'une aimantation induite

$$\bar{M}' = -\alpha'_M \bar{B}, \quad \alpha'_M > 0. \quad (7.1.18)$$

C'est l'effet **diamagnétique**; il est toujours présent mais relativement faible.

### Paramagnétisme

Si les molécules ont un moment magnétique résultant non nul, un effet supplémentaire apparaît dû au fait que les moments magnétiques ont tendance à s'aligner sur le champ  $\bar{B}$  (rappelons que l'énergie potentielle d'un dipôle,  $-\bar{\mu} \cdot \bar{B}$ , est minimale pour  $\bar{\mu} \parallel \bar{B}$ ); une aimantation supplémentaire apparaît dans la direction de  $\bar{B}$  cette fois

$$\bar{M}'' = \alpha''_M \bar{B}, \quad \text{avec } \alpha''_M > 0. \quad (7.1.19)$$

Dans de telles substances, l'effet total est

$$\bar{M} = (\alpha''_M - \alpha'_M) \bar{B} \quad (7.1.20)$$

avec  $\alpha''_M - \alpha'_M > 0$ . Ces substances sont dites **paramagnétiques**. L'orientation des dipôles dépend fortement de la température; elle est contrecarrée par l'agitation thermique.

## 7.2 Equations macroscopiques de la magnétostatique en présence de matière

Considérons un matériau (dia, para ou même ferromagnétique) dans lequel existe un moment magnétique moyen non nul. La densité de moment magnétique ou aimantation est désignée par  $\bar{M}(\bar{x})$ .

### 7.2.1 Potentiel d'aimantation

En l'absence de courants de particules libres ou de polarisation, les courants moléculaires sont la seule sources du champ magnétique. Le potentiel magnétique en  $\bar{x}$  est la somme des potentiels produits par les dipôles en  $\bar{x}'$ , de moment magnétique  $d\bar{\mu}(\bar{x}') = d^3x' \bar{M}(\bar{x}')$ , soit

$$\bar{A}(\bar{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \bar{M}(\bar{x}') \times \frac{(\bar{x} - \bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \bar{M}(\bar{x}') \times \nabla' \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|}. \quad (7.2.21)$$

En intégrant par parties, ceci devient, pour la  $k$ -ième composante du potentiel

$$A_k(\bar{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \sum_{\ell m} \epsilon_{k\ell m} [\partial'_m (M_\ell \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|}) - \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \partial'_m M_\ell] \quad (7.2.22)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \left\{ \sum_{\ell m} \partial'_m \epsilon_{k\ell m} (M_\ell \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|}) + \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} [\bar{\nabla}' \times \bar{M}(\bar{x}')]_k \right\} \quad (7.2.23)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \sum_{\ell m} \epsilon_{k\ell m} \oint_S dS'_m (M_\ell \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|}) + \int_V d^3x' \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} [\bar{\nabla}' \times \bar{M}(\bar{x}')]_k \right\} \quad (7.2.24)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ - \oint_S \frac{[\bar{dS}' \times \bar{M}(\bar{x}')]_k}{|\bar{x} - \bar{x}'|} + \int_V d^3x' \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} [\bar{\nabla}' \times \bar{M}(\bar{x}')]_k \right\} \quad (7.2.25)$$

ou encore

$$\bar{A}(\bar{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \oint_S \frac{\bar{M}(\bar{x}') \times \bar{dS}'}{|\bar{x} - \bar{x}'|} + \int_V d^3x' \frac{[\bar{\nabla}' \times \bar{M}(\bar{x}')]}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \right\}. \quad (7.2.26)$$

Ce potentiel est donc équivalent à celui produit

- par une distribution volumique de courants dans  $V$ , de densité

$$\bar{j}_M(\bar{x}) = \bar{\nabla} \times \bar{M}(\bar{x}), \quad \bar{x} \in V \quad (7.2.27)$$

- par une distribution superficielle de courants sur  $S$ , de densité

$$\bar{k}_M(\bar{x}) = \bar{M}(\bar{x}) \times \bar{n}, \quad \bar{x} \in S. \quad (7.2.28)$$

## 7.2.2 Cas général avec courants extérieurs

Outre les courants moléculaires, les sources du champ comportent aussi des courants extérieurs dont la densité volumique sera notée par  $\bar{j}^{ext}$ : ces courants extérieurs peuvent désigner aussi bien les courants qui circulent dans des boucles plongées dans la substance magnétisée que les courants de charges libres si cette substance est un conducteur. Les équations de la magnétostatique sont

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0 \quad (7.2.29)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \bar{j} = \mu_0 (\bar{j}^{ext} + \bar{j}_M). \quad (7.2.30)$$

ou

$$\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 [\bar{j}^{ext} + \bar{\nabla} \times \bar{M}], \quad (7.2.31)$$

ou encore

$$\bar{\nabla} \times [\bar{B} - \mu_0 \bar{M}] = \mu_0 \bar{j}^{ext}. \quad (7.2.32)$$

On est ainsi amené à introduire le champ magnétique  $\bar{H}$  par

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu_0} \bar{B} - \bar{M}; \quad (7.2.33)$$

il satisfait l'équation

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{j}^{ext}. \quad (7.2.34)$$

### 7.3 Aimantation uniforme

Le potentiel magnétique créé par un milieu aimanté, sans courants extérieurs, est donné par

$$\bar{A}(\bar{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \bar{M}(\bar{x}') \times \frac{(\bar{x} - \bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|^3}. \quad (7.3.35)$$

Lorsque l'aimantation est uniforme,  $\bar{M}(x) = \bar{M}_0$ , le potentiel se simplifie en

$$\bar{A}(\bar{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \bar{M}_0 \times \int_V d^3x' \frac{(\bar{x} - \bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|^3} \quad (7.3.36)$$

$$= \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\rho_0} \bar{M}_0 \times \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_V d^3x' \rho_0 \frac{(\bar{x} - \bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|^3} \quad (7.3.37)$$

$$= \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\rho_0} \bar{M}_0 \times \bar{\mathcal{E}}(\bar{x}) \quad (7.3.38)$$

où le champ auxiliaire  $\bar{\mathcal{E}}(\bar{x})$ , déjà introduit dans le cadre des diélectriques uniformément polarisés, est égal au champ électrique produit par la distribution de charge constante  $\rho_0$  dans  $V$ . L'induction magnétique s'en déduit par

$$\bar{B}(\bar{x}) = \bar{\nabla} \times \bar{A}(\bar{x}) = \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\rho_0} \bar{\nabla} \times [\bar{M}_0 \times \bar{\mathcal{E}}(\bar{x})]. \quad (7.3.39)$$

Sa  $k$ -ième composante cartésienne est égale à

$$B_k = \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\rho_0} \epsilon_{k\ell m} \partial_\ell [\bar{M}_0 \times \bar{\mathcal{E}}(\bar{x})]_m \quad (7.3.40)$$

$$= \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\rho_0} \epsilon_{k\ell m} \partial_\ell [\epsilon_{mab} M_{0a} \mathcal{E}_b] \quad (7.3.41)$$

$$= \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\rho_0} \epsilon_{k\ell m} \epsilon_{mab} M_{0a} \partial_\ell \mathcal{E}_b \quad (7.3.42)$$

$$= \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\rho_0} [\delta_{ka} \delta_{\ell b} - \delta_{kb} \delta_{\ell a}] M_{0a} \partial_\ell \mathcal{E}_b \quad (7.3.43)$$

$$= \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\rho_0} [M_{0k} \partial_\ell \mathcal{E}_\ell - M_{0\ell} \partial_\ell \mathcal{E}_k] \quad (7.3.44)$$

$$= \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\rho_0} [M_{0k} \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathcal{E}} - M_{0\ell} \partial_k \mathcal{E}_\ell] \quad (7.3.45)$$

$$= \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\rho_0} [M_{0k} \frac{\rho(\bar{x})}{\epsilon_0} - \partial_k (\bar{M}_0 \cdot \bar{\mathcal{E}})] \quad (7.3.46)$$

On a utilisé pour le champ auxiliaire

$$\partial_\ell \mathcal{E}_k = \partial_k \mathcal{E}_\ell \quad (7.3.47)$$

et

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathcal{E}}(\bar{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\bar{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \begin{cases} \rho_0 & \bar{x} \in V \\ 0 & \bar{x} \notin V \end{cases} \quad (7.3.48)$$

L'induction peut donc se récrire comme

$$\bar{B}_{in}(\bar{x}) = \mu_0 \bar{M}_0 - \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\rho_0} \bar{\nabla} (\bar{M}_0 \cdot \bar{\mathcal{E}}_{in}(\bar{x})) \quad (7.3.49)$$

et

$$\bar{B}_{out}(\bar{x}) = -\frac{\epsilon_0 \mu_0}{\rho_0} \bar{\nabla} (\bar{M}_0 \cdot \bar{\mathcal{E}}_{out}(\bar{x})). \quad (7.3.50)$$

Le champ magnétique est défini par

$$\bar{H}_{in} = \frac{1}{\mu_0} \bar{B}_{in} - \bar{M}_0 = -\bar{\nabla} \Phi_M^{in}, \quad \Phi_M^{in} = \frac{\epsilon_0}{\rho_0} \bar{M}_0 \cdot \bar{\mathcal{E}}_{in} \quad (7.3.51)$$

et

$$\bar{H}_{out} = \frac{1}{\mu_0} \bar{B}_{out} = -\bar{\nabla} \Phi_M^{out}, \quad \Phi_M^{out} = \frac{\epsilon_0}{\rho_0} \bar{M}_0 \cdot \bar{\mathcal{E}}_{out}. \quad (7.3.52)$$

En l'absence de courants extérieurs, le champ magnétique est donc un gradient

$$\bar{H} = -\bar{\nabla} \Phi_M. \quad (7.3.53)$$

Exemple: Boule de rayon  $a$  uniformément aimantée:  $\bar{M}_0 = M_0 \bar{1}_z$ .

Pour  $r < a$ , le champ auxiliaire vaut

$$\bar{\mathcal{E}}_{in} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \bar{1}_r, \quad \bar{M}_0 \cdot \bar{\mathcal{E}}_{in} = M_0 \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \cos \theta \quad (7.3.54)$$

Pour  $r > a$ ,

$$\bar{\mathcal{E}}_{out} = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r^2} \bar{1}_r, \quad \bar{M}_0 \cdot \bar{\mathcal{E}}_{out} = M_0 \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r^2} \cos \theta \quad (7.3.55)$$

On en tire donc que

$$\bar{B}_{in} = \mu_0 M_0 \bar{1}_z - \frac{\mu_0}{3} M_0 \bar{1}_z = \frac{2}{3} \mu_0 \bar{M}_0 \quad (7.3.56)$$

tandis que

$$\bar{B}_{out} = M_0 \frac{\mu_0 a^3}{3 r^3} [2 \cos \theta \bar{1}_r + \sin \theta \bar{1}_\theta] = M_0 \frac{\mu_0 a^3}{3 r^3} [3 (\bar{1}_z \cdot \bar{1}_r) \bar{1}_r - \bar{1}_z] \quad (7.3.57)$$

est l'induction produite par un dipôle magnétique, à l'origine, de moment dipolaire  $\bar{\mu} = \bar{M}_0 \frac{4}{3} \pi a^3$ .

Le champ magnétique est donné par

$$\bar{H}_{out} = \frac{1}{\mu_0} \bar{B}_{out} \quad (7.3.58)$$

et

$$\bar{H}_{in} = \frac{1}{\mu_0} \bar{B}_{in} - \bar{M}_0 = -\frac{1}{3} \bar{M}_0. \quad (7.3.59)$$

## 7.4 Conditions aux limites pour $\bar{B}$ et $\bar{H}$

Des équations (7.2.29) et (7.2.34), on déduit, par les techniques déjà abondamment utilisées, qu'à la surface de séparation entre deux milieux,

- la composante normale de  $\bar{B}$  est continue:

$$\bar{n} \cdot [\bar{B}_{(1)} - \bar{B}_{(2)}] = 0, \quad (7.4.60)$$

- les composantes tangentielles de  $\bar{H}$  sont discontinues s'il y a des courants  $\bar{k}^{ext}$  en surface:

$$\bar{n} \times [\bar{H}_{(1)} - \bar{H}_{(2)}] = \bar{k}^{ext}. \quad (7.4.61)$$



## 7.5 Relation entre $\bar{M}$ et $\bar{H}$

Les équations (7.2.29) et (7.2.34) doivent être complétées par des relations matérielles, analogues à celles des diélectriques.

### 7.5.1 Matériaux dia et paramagnétiques

Pour ce type de matériau et pour des champs magnétiques faibles, on admet que

$$\bar{M} = \chi_m \bar{H}, \quad (7.5.62)$$

où  $\chi_m$  est la *susceptibilité magnétique*. Le champ magnétique peut alors se récrire comme

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu} \bar{B}, \quad (7.5.63)$$

où  $\mu$  est la *permittivité magnétique* et

$$1 + \chi_m = \kappa_m = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (7.5.64)$$

est la *permittivité relative*.

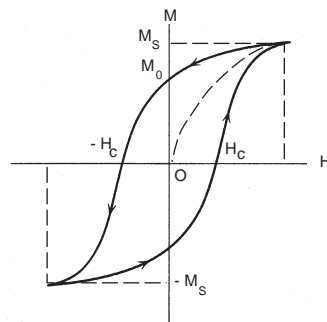
Comme dans le cas des diélectriques, les  $\chi_m, \mu, \kappa_m$  sont des constantes lorsque la magnétisation du matériau (supposé homogène et isotrope) apparaît comme une réponse linéaire à la présence de  $\bar{H}$ .

Pour les matériaux *diamagnétiques*,  $\chi_m < 0$ ,  $|\chi_m| \simeq 10^{-5}$ ,  $\kappa_m < 1$ .

Pour les matériaux *paramagnétiques*,  $\chi_m > 0$ ,  $\chi_m \simeq 10^{-3}$ ,  $\kappa_m > 1$ .

### 7.5.2 Substances ferromagnétiques

On y trouve Fe, Ni, Co et leurs alliages. Supposons que l'on place un barreau de fer non aimanté dans un solénoïde et qu'on allume un courant  $nI$ ; celui-ci produit un champ magnétisant  $\bar{H}$ . On mesure la magnétisation  $M$  pour  $I$  croissant. Elle commence comme une fonction croissante de  $H$ , un peu comme pour un paramagnétique, jusqu'à une valeur de saturation  $M_S$ . L'effet est quantitativement beaucoup plus fort: typiquement  $\chi_m \simeq 10^3$ .



Si l'on diminue  $H$  jusqu'à l'annuler,  $M$  ne retrace pas la courbe initiale; en  $H = 0$ , il subsiste une magnétisation rémanente  $M_0 \neq 0$ . Quand on inverse  $H$ ,  $M$  décroît jusqu'en 0, pour  $H = H_c$  (= champ coercitif), puis décroît jusqu'en  $-M_S$ .

En réaugmentant  $H$ ,  $M$  croît en passant par la valeur  $-M_0$  pour  $H = 0$ . Ensuite, si on fait varier alternativement  $H$ ,  $M$  retrace périodiquement cette courbe d'hystérèse.

On constate donc i) une magnétisation spontanée pour  $H = 0$ , ii) l'absence de relation fonctionnelle univoque entre  $\bar{M}$  et  $\bar{H}$  (ou  $\bar{B}$  et  $\bar{H}$ ) car la valeur de  $\bar{M}$ , pour  $\bar{H}$  donné, dépend de l'histoire antérieure qui seule permet de savoir sur quelle portion de la courbe on se trouve et iii) l'existence d'un cycle d'hystérèse qui implique une dissipation d'énergie. Pour des matériaux dont le cycle d'hystérèse est très étroit (fer doux), on a coutume de remplacer la boucle par une "droite moyenne" et d'utiliser la relation approchée  $\bar{M} \simeq \chi_m \bar{H}$ .

## 7.6 Potentiel pseudo-scalaire magnétique

Comme nous l'avons déjà rencontré ci-dessus, lorsque  $\bar{j}^{ext} = 0$ , l'équation

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{j}^{ext} = 0 \quad (7.6.65)$$

admet pour solution

$$\bar{H} = -\bar{\nabla}\Phi_M \quad (7.6.66)$$

où  $\Phi_M$  est la *potentiel pseudo-scalaire magnétique*. Si l'aimantation  $\bar{M}$  est connue (c'est le cas des ferro-aimants forts dont la magnétisation est pratiquement indépendante des champs extérieurs et qui peuvent être traités comme s'ils avaient une magnétisation fixe), on peut comme on l'a fait précédemment calculer le potentiel vecteur d'aimantation, mais le potentiel  $\Phi_M$  peut s'avérer plus utile dans certains cas. Puisque  $\frac{1}{\mu_0}\bar{B} = \bar{H} + \bar{M}$ , on déduit de l'équation  $\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0$ , que

$$\Delta\Phi_M = \bar{\nabla} \cdot \bar{M} = -\rho_M \quad (7.6.67)$$

où  $\rho_M$  est la *densité volumique effective de charges magnétiques* (analogue à la densité volumique de charges de polarisation dans un diélectrique). On retrouve une fois de plus l'équation de Poisson. Si  $\bar{M}$  est non nulle seulement dans un volume  $V$  borné de  $R^3$  et s'il n'y a pas de magnétisation en surface, la solution qui s'annule à l'infini au moins comme  $\frac{1}{|\bar{x}|}$  est donnée par

$$\Phi_M(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\rho_M(\bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|} = -\frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\bar{\nabla}' \cdot \bar{M}'(\bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|}. \quad (7.6.68)$$

En intégrant par parties, il vient aussi

$$\Phi_M(\bar{x}) = -\frac{1}{4\pi} \bar{\nabla} \cdot \int_V d^3x' \frac{\bar{M}(\bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|}. \quad (7.6.69)$$

Ce potentiel est dominé à grande distance, pour  $|\bar{x}| \gg \gg |\bar{x}'|$ , par sa contribution dipolaire

$$\Phi_M(\bar{x}) \simeq -\frac{1}{4\pi} \left(\bar{\nabla} \frac{1}{r}\right) \cdot \bar{\mu} \quad , \quad \bar{\mu} = \int_V d^3x' \bar{M}(\bar{x}'). \quad (7.6.70)$$

La magnétisation d'un matériau occupant un volume fini peut aussi fournir une *distribution surfacique effective de charges magnétiques* par

$$\sigma_M(\bar{x}) = \bar{n} \cdot \bar{M}(\bar{x}), \quad \bar{x} \in S. \quad (7.6.71)$$

On l'obtient en intégrant  $\rho_M$  sur le volume d'une petite boîte cylindrique (pillbox) placée à cheval sur la surface de séparation entre le milieu magnétisé et le vide: en effet,

$$- \int_{bte} d^3x \nabla \cdot \bar{M} = - \oint_{surf.bte} \bar{dS} \cdot \bar{M} = \bar{n} \cdot \bar{M} dS = \sigma_M dS \quad (7.6.72)$$

où  $\bar{n}$  désigne la normale qui pointe vers l'extérieur du matériau. Lorsqu'il y a des charges magnétiques, en volume et en surface, le potentiel  $\Phi_M$  est donné par la somme

$$\Phi_M(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\rho_M(\bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_S dS' \frac{\sigma_M(\bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|}. \quad (7.6.73)$$

Si la magnétisation est uniforme dans V ( $\bar{M}(\bar{x}) = \bar{M}_0$ ), seule l'intégrale de surface contribue au potentiel car, dans ce cas,  $\rho_M = 0$ .

## 7.7 Energie magnétique et tensions magnétostatiques dans des milieux linéaires, homogènes et isotropes

L'énergie du champ magnétique se généralise en

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V d^3x \bar{H} \cdot \bar{B}, \quad (7.7.74)$$

La densité d'énergie en

$$w_m = \frac{1}{2} \bar{H} \cdot \bar{B} \quad (7.7.75)$$

Les composantes du tenseur des tensions magnétostatiques deviennent

$$T_{k\ell}^{(m)} = H_k B_\ell - \frac{1}{2} \delta_{k\ell} \bar{H} \cdot \bar{B}. \quad (7.7.76)$$

Sa divergence est égale à la densité de force

$$\sum_{\ell} \partial_{\ell} T_{k\ell}^{(m)} = [\bar{j}^{ext} \times \bar{B}]_k. \quad (7.7.77)$$

## Chapitre 8

# Electromagnétisme

### 8.1 Equations de Maxwell dans le vide

Rappelons les équations de Maxwell<sup>1</sup> en termes des sources

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (8.1.2)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (8.1.3)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0 \quad (8.1.4)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 [\bar{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}]. \quad (8.1.5)$$

### 8.2 Equations de Maxwell dans la matière

Bien que les équations ci-dessus soient universellement valables, il est commode, lorsqu'on s'intéresse aux champs dans la matière, de leur donner une forme différente basée sur la distinction entre sources extérieures et sources d'origine moléculaire:

$$\rho = \rho^{ext} + \rho_p = \rho^{ext} - \bar{\nabla} \cdot \bar{P} \quad (8.2.6)$$

$$\bar{j} = \bar{j}^{ext} + \bar{j}_M + \bar{j}_p = \bar{j}^{ext} + \bar{\nabla} \times \bar{M} + \partial_t \bar{P}. \quad (8.2.7)$$

Nous avons explicitement mis dans les sources de courants le courant de polarisation  $\bar{j}_p = \partial_t \bar{P}$  produit par le mouvement des charges de polarisation. Les équations avec sources deviennent

$$\bar{\nabla} \cdot [\bar{E} + \frac{\bar{P}}{\epsilon_0}] = \frac{\rho^{ext}}{\epsilon_0} \quad (8.2.8)$$

$$\bar{\nabla} \times [\bar{B} - \mu_0 \bar{M}] = \mu_0 \{ \partial_t [\epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}] + \bar{j}^{ext} \}. \quad (8.2.9)$$

---

1. Si on découvrait des monopôles magnétiques, il faudrait modifier les équations sans sources en

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\mu_0 \bar{j}_m - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \bar{\nabla} \cdot \bar{B} = \mu_0 \rho_m \quad (8.1.1)$$

et ajouter l'équation de continuité  $\partial_t \rho_m + \bar{\nabla} \cdot \bar{j}_m = 0$ .

En terme des champs

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \quad (8.2.10)$$

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu_0} \bar{B} - \bar{M}, \quad (8.2.11)$$

elles s'écrivent

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{D} = \rho^{ext} \quad (8.2.12)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \partial_t \bar{D} + \bar{j}^{ext}. \quad (8.2.13)$$

S'y ajoutent évidemment les équations sans sources

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\partial_t \bar{B} \quad (8.2.14)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0. \quad (8.2.15)$$

L'ensemble de ces équations ne peut être résolu que si l'on introduit des relations matérielles

$$\bar{D} = \bar{D}[\bar{E}, \bar{B}], \quad \bar{H} = \bar{H}[\bar{E}, \bar{B}], \quad (8.2.16)$$

qui dépendent évidemment de la nature du milieu.

*Dans le vide*

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E}, \quad \bar{B} = \mu_0 \bar{H}. \quad (8.2.17)$$

*Dans un milieu linéaire, homogène, isotrope*

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E}, \quad \bar{B} = \mu \bar{H}, \quad \epsilon, \mu \text{ const.} \quad (8.2.18)$$

Ces relations sont très loin d'être générales.

### 8.3 Les potentiels électromagnétiques

Rappelons que les équations sans sources deviennent des identités si l'on exprime les champs en termes des potentiels

$$\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A} \quad (8.3.19)$$

$$\bar{E} = -\bar{\nabla} \phi - \partial_t \bar{A}. \quad (8.3.20)$$

Dans le cas des milieux linéaires, homogènes et isotropes où  $\epsilon, \mu$  sont des constantes; en injectant (8.3.19), (8.3.20) dans les équations avec sources, il vient

$$\bar{D} = -\epsilon [\bar{\nabla} \phi + \partial_t \bar{A}], \quad \bar{\nabla} \times \bar{A} = \mu \bar{H} \quad (8.3.21)$$

et

$$\Delta \phi + \partial_t \bar{\nabla} \cdot \bar{A} = -\frac{\rho^{ext}}{\epsilon} \quad (8.3.22)$$

$$\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{A}) = -\mu \epsilon \partial_t (\bar{\nabla} \phi + \partial_t \bar{A}) + \mu \bar{j}^{ext} \quad (8.3.23)$$

Comme nous l'avons indiqué au chapitre 1, ces équations aux potentiels se simplifient pour des potentiels qui satisfont la condition de jauge de Lorenz

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{A} + \epsilon \mu \partial_t \phi = 0. \quad (8.3.24)$$

Dans ce cas, elles deviennent des équations d'ondes non homogènes

$$\square \phi = \frac{\rho^{ext}}{\epsilon} \quad (8.3.25)$$

$$\square \bar{A} = \mu \bar{j}^{ext} \quad (8.3.26)$$

où

$$\square = \frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad (8.3.27)$$

et

$$c' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (8.3.28)$$

est la vitesse de la lumière dans la matière. En coordonnées cartésiennes, ces équations sont des équations de d'Alembert inhomogènes séparées pour  $\phi$  et les trois composantes du potentiel vecteur.

**Remarque 8.1.** Dans la jauge de Coulomb,  $\bar{\nabla} \cdot \bar{A} = 0$ , comme évoqué au chapitre 1, les équations aux potentiels deviennent

$$\Delta \phi(\bar{x}, t) = - \frac{\rho^{ext}(\bar{x}, t)}{\epsilon} \quad (8.3.29)$$

$$\square \bar{A}(\bar{x}, t) = \mu \bar{j}^{eff}(\bar{x}, t) \quad (8.3.30)$$

où la densité de courant effective est définie comme

$$\bar{j}^{eff} = \bar{j}^{ext} - \epsilon \bar{\nabla} \partial_t \phi. \quad (8.3.31)$$

Le potentiel scalaire obéit à une équation de Poisson; elle se résout comme en électrostatique et, par exemple, la solution qui tend vers zéro à l'infini comme  $|\bar{x}|^{-1}$  est donnée par

$$\phi(\bar{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int d^3x' \frac{\rho^{ext}(\bar{x}', t)}{|\bar{x} - \bar{x}'|}. \quad (8.3.32)$$

L'équation du potentiel vecteur est du même type que celle que l'on obtient dans la jauge de Lorenz, mais la source  $\bar{j}^{eff}$  n'est plus localisée dans l'espace.

## 8.4 Potentiels retardés, potentiels avancés

### 8.4.1 Fonctions de Green retardée et avancée

En coordonnées cartésiennes, chacune des équations (8.3.25), (8.3.27) est une équation de d'Alembert inhomogène

$$\square \psi(\bar{x}, t) = f(\bar{x}, t), \quad (8.4.33)$$

où  $f$  est une fonction-source connue, supposée localisée dans l'espace. La solution *retardée* de cette équation, valable dans tout  $\mathbb{R}^3$ , et qui s'annule pour  $|\bar{x}| \rightarrow \infty$  au moins comme  $|\bar{x}|^{-1}$  est donnée par

$$\psi_{ret}(\bar{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_V d^3x' \mathcal{G}_{ret}(\bar{x}, t; \bar{x}', t') f(\bar{x}', t') \quad (8.4.34)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{f(\bar{x}', t - \frac{|\bar{x} - \bar{x}'|}{c'})}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \quad (8.4.35)$$

où  $\mathcal{G}_{ret}(\bar{x}, t; \bar{x}', t')$  est la *fonction de Green retardée* (non nulle seulement pour  $t > t'$ ) de l'équation d'ondes, solution de

$$\square \mathcal{G}_{ret}(\bar{x}, t; \bar{x}', t') = 4\pi \delta(t - t') \delta^3(\bar{x} - \bar{x}'). \quad (8.4.36)$$

donnée par

$$\mathcal{G}_{ret}(\bar{x}, t; \bar{x}', t') = \delta(t - t' - \frac{|\bar{x} - \bar{x}'|}{c'}) \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \quad (8.4.37)$$

Vérifions<sup>2</sup> ceci explicitement pour  $\mathcal{G}_{ret}(\bar{x}, t; 0, 0) = \delta(t - \frac{r}{c'}) \frac{1}{r}$ . En effet,

$$\square \mathcal{G}_{ret}(\bar{x}, t; 0, 0) = \frac{1}{c'^2} \partial_t^2 \delta(t - \frac{r}{c'}) \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \Delta \delta(t - \frac{r}{c'}) \quad (8.4.38)$$

$$- \delta(t - \frac{r}{c'}) \Delta \frac{1}{r} - 2\bar{\nabla} \delta(t - \frac{r}{c'}) \cdot \bar{\nabla} \frac{1}{r}; \quad (8.4.39)$$

en mettant bout à bout les résultats suivants

$$\Delta \delta(t - \frac{r}{c'}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r} \delta) \quad (8.4.40)$$

$$= -\frac{2}{c'r} \partial_t \delta(t - \frac{r}{c'}) + \frac{1}{c'^2} \partial_t^2 \delta(t - \frac{r}{c'}) \quad (8.4.41)$$

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta^3(\bar{x}) \quad (8.4.42)$$

$$\bar{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \bar{1}_r \quad (8.4.43)$$

$$\bar{\nabla} \delta(t - \frac{r}{c'}) = -\frac{1}{c'} \partial_t \delta(t - \frac{r}{c'}) \bar{1}_r \quad (8.4.44)$$

il reste bien

$$\square \mathcal{G}_{ret}(\bar{x}, t; 0, 0) = 4\pi \delta(t - \frac{r}{c'}) \delta^3(\bar{x}) = 4\pi \delta(t) \delta^3(\bar{x}). \quad (8.4.45)$$

La *solution avancée*, valable dans tout  $\mathbb{R}^3$ , et qui s'annule pour  $|\bar{x}| \rightarrow \infty$  au moins comme  $|\bar{x}|^{-1}$  est donnée par

$$\psi_{av}(\bar{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_V d^3x' \mathcal{G}_{av}(\bar{x}, t; \bar{x}', t') f(\bar{x}', t') \quad (8.4.46)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{f(\bar{x}', t + \frac{|\bar{x} - \bar{x}'|}{c'})}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \quad (8.4.47)$$

---

2. Voir aussi appendice

où  $\mathcal{G}_{av}(\bar{x}, t; \bar{x}', t')$  est la *fonction de Green avancée* (non nulle seulement pour  $t < t'$ ) de l'équation d'ondes

$$\mathcal{G}_{av}(\bar{x}, t; \bar{x}', t') = \delta(t' - t - \frac{|\bar{x} - \bar{x}'|}{c'}) \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \quad (8.4.48)$$

solution de l'équation

$$\square \mathcal{G}_{av}(\bar{x}, t; \bar{x}', t') = 4\pi \delta(t - t') \delta^3(\bar{x} - \bar{x}'). \quad (8.4.49)$$

**Remarque 8.2.** *La solution retardée est souvent considérée comme étant la seule solution acceptable parce que conforme au principe de causalité qui veut que "la cause précède l'effet": la source ( $f$ ) en  $\bar{x}'$  au temps  $t'$  produit un effet ( $\psi_{ret}$ ) en  $\bar{x}$  au temps retardé  $t = t' + \frac{|\bar{x} - \bar{x}'|}{c'}$ . Le retard ( $t - t'$ ) est le temps mis par l'onde pour parcourir la distance  $|\bar{x} - \bar{x}'|$  à la vitesse de la lumière  $c'$ .*

*Cependant, dans la résolution de certains problèmes aux limites (tels ceux que l'on rencontre en théorie des champs) la solution avancée et d'autres encore trouvent leur utilité. Si la source  $f(\bar{x}', t')$  est localisée dans le temps, par exemple pour  $t' \in [t_0, t_1]$ , la solution retardée  $\psi_{ret}(\bar{x}, t)$  est nulle pour  $t < t_0$  et la solution avancée  $\psi_{av}(\bar{x}, t)$  est nulle pour  $t > t_1$ ; ce ne sont évidemment pas les seules solutions de l'équation d'ondes puisqu'on peut toujours leur ajouter une solution de l'équation homogène. Ainsi, par exemple,*

$$\psi(\bar{x}, t) = \psi_{in}(\bar{x}, t) + \psi_{ret}(\bar{x}, t). \quad (8.4.50)$$

*pour  $\psi_{in}(\bar{x}, t)$  solution de l'équation homogène, est la solution de l'équation d'ondes qui coïncide avec  $\psi_{in}$  pour tous les  $t < t_0$ . Elle décrit la situation où une onde entrante se propage dans l'espace et le temps jusqu'en  $t_0$  puis qui, pour  $t > t_0$ , se superpose aux ondes engendrées par la source. De même, la solution qui, pour  $t > t_1$ , coïncide avec  $\psi_{out}(\bar{x}, t)$  solution de l'équation homogène est donnée par*

$$\psi(\bar{x}, t) = \psi_{out}(\bar{x}, t) + \psi_{av}(\bar{x}, t). \quad (8.4.51)$$

*La présence de la solution avancée, nulle pour  $t > t_1$ , garantit qu'après extinction de la source en  $t_1$ ,  $\psi$  ne recevra plus aucun signal en provenance de la source. Dans la résolution des problèmes qui imposent à la solution de l'équation de satisfaire des conditions aux limites dans le temps, on constate que la solution avancée recouvre une légitimité que peu d'auteurs de physique classique lui reconnaissent. La théorie quantique des champs utilise d'ailleurs d'autres solutions encore (voir, par exemple le rôle privilégié de la fonction de Green "causale" ou "propagateur de Feynman").*

## 8.4.2 Potentiels retardés, potentiels avancés

*Les potentiels retardés solutions des équations, dans le vide, donc pour  $\epsilon = \epsilon_0, \mu = \mu_0, c' = c$ , sont donnés par*

$$\phi_{ret}(\bar{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho(\bar{x}', t - \frac{|\bar{x} - \bar{x}'|}{c})}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \quad (8.4.52)$$

$$\bar{A}_{ret}(\bar{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\bar{j}(\bar{x}', t - \frac{|\bar{x} - \bar{x}'|}{c})}{|\bar{x} - \bar{x}'|}. \quad (8.4.53)$$



On vérifiera explicitement comme exercice qu'ils satisfont la condition de jauge de Lorenz du fait de la conservation locale de l'électricité.

Les potentiels avancés sont

$$\phi_{av}(\bar{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho(\bar{x}', t + \frac{|\bar{x} - \bar{x}'|}{c})}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \quad (8.4.54)$$

$$\bar{A}_{av}(\bar{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\bar{j}(\bar{x}', t + \frac{|\bar{x} - \bar{x}'|}{c})}{|\bar{x} - \bar{x}'|}. \quad (8.4.55)$$

Ils vérifient également la condition de jauge de Lorenz.

## 8.5 Champs retardés et champs avancés

Les champs électrique  $\bar{E}_{ret,av}(\bar{x}, t)$  et magnétique  $\bar{B}_{ret,av}(\bar{x}, t)$  retardés ou avancés se déduisent des potentiels correspondants par (8.3.19) et (8.3.20). Ainsi les champs retardés sont donnés par

$$\bar{B}_{ret}(\bar{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \left[ \bar{\nabla} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \times \bar{j}(\bar{x}', t') + \right. \quad (8.5.56)$$

$$\left. + \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \partial_{t'} \bar{j}(\bar{x}', t') \times \bar{\nabla} \frac{|\bar{x} - \bar{x}'|}{c} \right] \quad (8.5.57)$$

$$\bar{E}_{ret}(\bar{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \left[ -\rho(\bar{x}', t') \bar{\nabla} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} + \frac{\partial_{t'} \rho(\bar{x}', t')}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \bar{\nabla} \frac{|\bar{x} - \bar{x}'|}{c} \right] \quad (8.5.58)$$

$$- \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \partial_{t'} \bar{j}(\bar{x}', t') \quad (8.5.59)$$

où

$$t' = t - \frac{|\bar{x} - \bar{x}'|}{c}. \quad (8.5.60)$$

## 8.6 Champs de rayonnement

Choisissons un système de coordonnées dont l'origine est située dans le volume  $V$  occupé par les sources de charges et de courants et analysons le comportement des champs retardés pour  $r = |\bar{x}|$  grand par rapport à l'étalement spatial des sources, donc pour  $|\bar{x}| \gg |\bar{x}'|$  où  $\bar{x}'$  désigne un point courant dans  $V$ .

Le membre de droite de (8.5.57)

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \bar{\nabla} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \times \bar{j}(\bar{x}', t') \quad (8.6.61)$$

et le premier terme du membre de droite de (??)

$$- \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \rho(\bar{x}', t') \bar{\nabla} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \quad (8.6.62)$$

décroissent pour  $r \rightarrow \infty$  comme  $r^{-2}$ , comme en électrostatique et en magnétostatique. Par contre, les autres termes ne décroissent que comme  $r^{-1}$  et sont donc dominants à

grande distance: pour des raisons qui seront claires plus loin, ils sont appelés *champs de rayonnement* ou *champs de radiation*. Si nous ne gardons que ceux-ci dans l'expression des champs retardés, nous pouvons remplacer dans les intégrales (8.5.57) et (8.5.58)  $|\bar{x} - \bar{x}'|^{-1}$  par  $r^{-1}$  et  $\bar{\nabla}|\bar{x} - \bar{x}'|$  par  $\bar{\nabla}r = \bar{n} = \bar{1}_r$  [!!  $|\bar{x} - \bar{x}'|$  figure encore dans  $t'$ , on en tiendra compte plus loin]. Il reste donc, pour les champs de radiation,

$$\bar{B}_{rad}(\bar{x}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{c} \frac{\bar{n}}{r} \times \int_V d^3x' \partial_{t'} \bar{j}(\bar{x}', t') \quad (8.6.63)$$

et

$$\bar{E}_{rad}(\bar{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \frac{\bar{n}}{r} \int_V d^3x' \partial_{t'} \rho(\bar{x}', t') - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int_V d^3x' \partial_{t'} \bar{j}(\bar{x}', t') \quad (8.6.64)$$

De l'équation de continuité

$$\partial_{t'} \rho(\bar{x}', t') + \bar{\nabla}' \cdot \bar{j}(\bar{x}', t')|_{(t'=constant)} = 0 \quad (8.6.65)$$

on tire

$$\partial_{t'} \rho(\bar{x}', t') = - \sum_k \frac{d}{dx'^k} j_k(\bar{x}', t - \frac{|\bar{x} - \bar{x}'|}{c}) + \frac{1}{c} \partial_{t'} \bar{j}(\bar{x}', t') \cdot \bar{\nabla}r \quad (8.6.66)$$

où les dérivées par rapport aux variables  $x'^k$  sont maintenant prises à  $t$  constant. On en tire donc que

$$\int_V d^3x' \partial_{t'} \rho(\bar{x}', t') = \frac{1}{c} \int_V d^3x' (\bar{\nabla}|\bar{x} - \bar{x}'| \cdot \partial_{t'} \bar{j}(\bar{x}', t')); \quad (8.6.67)$$

en oubliant l'intégrale de la divergence qui se convertit par Ostrogradsky en une intégrale de surface nulle car  $\bar{j}$  est nul sur  $S$ . Puisque  $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$ , le champ électrique de radiation devient ainsi

$$\bar{E}_{rad}(\bar{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\bar{n}}{r} [\bar{n} \cdot \int_V d^3x' \partial_{t'} \bar{j}(\bar{x}', t')] - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int_V d^3x' \partial_{t'} \bar{j}(\bar{x}', t'). \quad (8.6.68)$$

En introduisant le nouveau champ vectoriel (parfois appelé potentiel de Hertz)

$$\bar{\Gamma}(\bar{x}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int_V d^3x' \partial_{t'} \bar{j}(\bar{x}', t'), \quad (8.6.69)$$

(8.6.63) et (8.6.68) deviennent

$$\bar{B}_{rad}(\bar{x}, t) = \frac{1}{c} \bar{n}(\bar{x}) \times \bar{\Gamma}(\bar{x}, t) \quad (8.6.70)$$

$$\bar{E}_{rad}(\bar{x}, t) = -\bar{n}(\bar{x}) [\bar{n}(\bar{x}) \cdot \bar{\Gamma}(\bar{x}, t)] + \bar{\Gamma}(\bar{x}, t) = -c \bar{n}(\bar{x}) \times \bar{B}_{rad}(\bar{x}, t) \quad (8.6.71)$$

On en déduit que, en chaque point  $\bar{x}$  loin des sources

$$\bar{n} \cdot \bar{B}_{rad} = 0, \quad \bar{n} \cdot \bar{E}_{rad} = 0, \quad \bar{B}_{rad} \cdot \bar{E}_{rad} = 0. \quad (8.6.72)$$

En tout point  $\bar{x}$ , loin des sources,  $\bar{E}_{rad}$  et  $\bar{B}_{rad}$  sont donc dans le "plan d'onde" (càd le plan tangent à la sphère centrée à l'origine, de rayon  $r$ ) et ils sont perpendiculaires entre eux.

En outre

$$\bar{n} \times \bar{E}_{rad} = c \bar{B}_{rad} \quad (8.6.73)$$

$$\bar{E}_{rad} \times \bar{B}_{rad} = \frac{\bar{n}}{c} \bar{E}_{rad}^2 \quad (8.6.74)$$

les vecteurs  $\bar{n}, \bar{E}_{rad}, \bar{B}_{rad}$  forment un trièdre trirectangle dextrogyre et

$$\bar{E}_{rad}^2 = c^2 \bar{B}_{rad}^2. \quad (8.6.75)$$

$\bar{E}_{rad}(\bar{x}, t)$  est dans le plan sous-tendu par  $\bar{n}(\bar{x})$  et  $\bar{\Gamma}(\bar{x}, t)$ , tandis que  $\bar{B}_{rad}(\bar{x}, t)$  est perpendiculaire à ce plan.

## 8.7 Tenseur des tensions électromagnétiques dans le vide: bilan d'impulsion

La force, par unité de volume, que le champ électromagnétique exerce, à l'instant  $t$ , sur les répartitions de charges et de courants est donnée par la densité de force de Lorentz, somme des contributions électrique et magnétique

$$\bar{f} = \rho \bar{E} + \bar{j} \times \bar{B}. \quad (8.7.76)$$

On est donc naturellement amené à introduire le tenseur des tensions électro-magnétiques, comme la somme des contributions électrique et magnétique, par ses composantes

$$T_{k\ell} = T_{k\ell}^{(e)} + T_{k\ell}^{(m)} = \epsilon_0 E_k E_\ell + \frac{1}{\mu_0} B_k B_\ell - \frac{1}{2} \delta_{k\ell} (\epsilon_0 \bar{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \bar{B}^2). \quad (8.7.77)$$

En vertu des équations de Maxwell du vide, sa divergence est égale à

$$\sum_{\ell} \partial_{\ell} T_{k\ell} = \rho E_k + (\bar{j} \times \bar{B})_k + \epsilon_0 \partial_t (\bar{E} \times \bar{B})_k. \quad (8.7.78)$$

Le dernier terme

$$\epsilon_0 \partial_t (\bar{E} \times \bar{B})_k = \partial_t (\bar{D} \times \bar{B})_k. \quad (8.7.79)$$

est nouveau par rapport à ce qu'on avait en électrostatique et en magnétostatique, mais on sait qu'un vecteur, dont la dérivée par rapport au temps est une (densité de) force, est une (densité d') impulsion.

En intégrant les deux membres de (8.7.78) sur un volume  $V$  contenant des sources, on obtient la force totale électromagnétique sur les sources dans  $V$

$$F_k + \frac{d}{dt} \int_V d^3x (\bar{D} \times \bar{B})_k = \int_V d^3x \sum_{\ell} \partial_{\ell} T_{k\ell} \quad (8.7.80)$$

$$= \sum_{\ell} \oint_S dS_{\ell} T_{k\ell}. \quad (8.7.81)$$

Or, l'équation de Newton pour la matière électrisée s'écrit

$$\frac{d}{dt} P_k^{mat} = F_k, \quad (8.7.82)$$

où  $\bar{P}^{mat}$  est son impulsion. On est donc tout naturellement amené à interpréter

$$\int_V d^3x (\bar{D} \times \bar{B}) = \bar{P}_{e.m.} = \int_V d^3x \bar{p}_{e.m.} \quad (8.7.83)$$

comme l'impulsion du champ é.m. contenue dans le volume  $V$  et

$$\bar{D} \times \bar{B} = \bar{p}_{e.m.} \quad (8.7.84)$$

comme la densité d'impulsion du champ électromagnétique. (8.7.81) exprime donc que la variation, par unité de temps, de l'impulsion totale du système "champs et sources matérielles" dans le volume  $V$  est égale au flux d'impulsion é.m. qui sort de ce volume en traversant la surface fermée  $S$ , par seconde.

### Cas particuliers

a) *En l'absence de sources*, (8.7.78), exprime la conservation locale de l'impulsion é.m.

$$\partial_t p_k^{e.m.} + \sum_{\ell} \partial_{\ell} (-T_{k\ell}) = 0. \quad (8.7.85)$$

Evidemment, le tenseur  $-T$  est la densité de courant d'impulsion é.m.: plus précisément,  $-T_{k\ell}$  est la  $k$ -ième composante de l'impulsion é.m. qui traverse la surface unité de normale  $\bar{1}_{\ell}$ , par unité de temps. Intégrée sur un volume  $V$  limité par  $S$ , ceci devient

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x p_k^{e.m.} = \int_V d^3x \sum_{\ell} \partial_{\ell} T_{k\ell} = \sum_{\ell} \oint_S dS n_{\ell} T_{k\ell}, \quad (8.7.86)$$

où  $\bar{n}$  est le vecteur normal à  $S$  sortant de  $V$ . La perte d'impulsion é.m. contenue dans le volume  $V$ , par unité de temps, est due au flux d'impulsion é.m. qui sort de ce volume en traversant la surface fermée  $S$ , par unité de temps. Lorsque ce flux est nul, on a

$$\frac{d}{dt} P_k^{e.m.} = \frac{d}{dt} \int_V d^3x p_k^{e.m.} = 0 \quad (8.7.87)$$

ou conservation de l'impulsion électromagnétique.

b) *Pour une distribution de charges  $\rho$ , en mouvement*, de masse spécifique  $\mu(\bar{x}, t)$  et de vitesse  $\bar{v}(\bar{x}, t)$ , l'équation (8.7.78) devient

$$\partial_t p_k^{e.m.} + \sum_{\ell} \partial_{\ell} (-T_{k\ell}) + \rho [E_k + (\bar{v} \times \bar{B})_k] = 0. \quad (8.7.88)$$

De l'équation du mouvement du fluide électrisé

$$\rho [E_k + (\bar{v} \times \bar{B})_k] = \mu \frac{d}{dt} v_k[\bar{x}(t), t] \quad (8.7.89)$$

$$= \partial_t (\mu v_k) + \sum_{\ell} \partial_{\ell} (\mu v_{\ell} v_k) \quad (8.7.90)$$

où il a été fait usage de l'équation de continuité

$$\partial_t \mu + \sum_{\ell} \partial_{\ell} (\mu v_{\ell}) = 0, \quad (8.7.91)$$

et de

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \partial_t \bar{v} + (\bar{v} \cdot \bar{\nabla}) \bar{v}, \quad (8.7.92)$$

on tire

$$\partial_t (\mu v_k + p_k^{e.m.}) + \sum_{\ell} \partial_{\ell} (\mu v_k v_{\ell} - T_{k\ell}) = 0, \quad (8.7.93)$$

la loi locale de conservation de l'impulsion totale du système champ + matière électrisée: la densité d'impulsion totale vaut

$$\mu \bar{v} + \bar{p}^{e.m.} \quad (8.7.94)$$

## 8.8 Bilan d'énergie: Théorème de Poynting

Nous avons obtenu précédemment, dans le vide et pour des champs statiques, les densités d'énergie électrique et magnétique. Nous supposons ici que dans le cas des champs variables, la densité d'énergie électromagnétique est donnée par la somme de ces deux contributions, c'est-à-dire par

$$w = \frac{1}{2} [\epsilon_0 \bar{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \bar{B}^2] = \frac{1}{2} [\bar{E} \cdot \bar{D} + \bar{B} \cdot \bar{H}], \quad (8.8.95)$$

où

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} \quad \text{et} \quad \bar{H} = \frac{1}{\mu_0} \bar{B} \quad (8.8.96)$$

On obtient le bilan local d'énergie en calculant sa dérivée par rapport au temps. En vertu des équations de Maxwell, on trouve que

$$\partial_t w = \bar{E} \cdot (\partial_t \bar{D}) + (\partial_t \bar{B}) \cdot \bar{H} \quad (8.8.97)$$

$$= \bar{E} \cdot [\bar{\nabla} \times \bar{H} - \bar{j}] - [\bar{\nabla} \times \bar{E}] \cdot \bar{H} \quad (8.8.98)$$

$$= -\bar{E} \cdot \bar{j} - \bar{\nabla} \cdot (\bar{E} \times \bar{H}). \quad (8.8.99)$$

Pour obtenir la dernière ligne, on a utilisé l'égalité vectorielle suivante

$$\bar{E} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{H}) - (\bar{\nabla} \times \bar{E}) \cdot \bar{H} = -\bar{\nabla} \cdot (\bar{E} \times \bar{H}). \quad (8.8.100)$$

(8.8.99) peut encore se mettre sous la forme

$$\partial_t w + \bar{\nabla} \cdot \bar{S} = -\bar{E} \cdot \bar{j} \quad (8.8.101)$$

du bilan local d'énergie électromagnétique. Le vecteur de POYNTING

$$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H} \quad (8.8.102)$$

n'est autre que la *densité de courant d'énergie électromagnétique*.

$\bar{E} \cdot \bar{j}$  est la puissance enlevée aux champs é.m. et conférée aux sources.

### Cas particuliers

1) *En l'absence de sources*, le membre de droite de (8.8.101) est nul; il reste donc la loi de conservation locale de l'énergie

$$\partial_t w + \bar{\nabla} \cdot \bar{S} = 0 \quad (8.8.103)$$

Intégrée sur le volume  $V$  limité par la surface fermée  $S$ , elle donne

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x w = - \oint_S dS \bar{n} \cdot \bar{S} \quad (8.8.104)$$

qui exprime que la perte d'énergie électromagnétique dans le volume  $V$ , par seconde, est due au flux d'énergie rayonnée au travers de la surface  $S$ . Lorsque ce flux est nul, il reste

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V d^3x w = 0 \quad (8.8.105)$$

ou la conservation de l'énergie é.m.

2) *Pour une répartition de charges  $\rho(\bar{x},t)$  en mouvement*, de masse spécifique  $\mu(\bar{x},t)$  et de vitesse  $\bar{v}(\bar{x},t)$ , on déduit de l'équation du mouvement

$$\mu \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho (\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) \quad (8.8.106)$$

avec

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \partial_t \bar{v} + (\bar{v} \cdot \bar{\nabla}) \bar{v}, \quad (8.8.107)$$

la puissance transférée au fluide électrisé

$$\bar{j} \cdot \bar{E} = \rho \bar{v} \cdot \bar{E} = \partial_t \left( \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 \right) + \sum_k \partial_k \left( \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 v_k \right). \quad (8.8.108)$$

Le bilan local d'énergie devient donc

$$\partial_t \left( \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 + w \right) + \sum_k \partial_k \left( \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 v_k + S_k \right) = 0 \quad (8.8.109)$$

qui n'est autre que la loi locale de conservation de l'énergie totale du système champs + sources électrisées.

3) *Loin d'une source localisée* Nous avons vu précédemment que, dans le vide, loin des sources, les champs de rayonnement  $\bar{E}_{rad}, \bar{B}_{rad}$  et le vecteur unité  $\bar{n} = \bar{I}_r$  normal au plan d'onde, forment, en chaque point loin des sources un trièdre trirectangle dextrogyre et que

$$\bar{E}_{rad}^2 = c^2 \bar{B}_{rad}^2 \quad (8.8.110)$$

Il s'en suit que, loin des sources, la densité d'énergie électromagnétique se réduit à

$$w = \epsilon_0 \bar{E}_{rad}^2, \quad (8.8.111)$$

que le vecteur de Poynting devient

$$\bar{S} = \bar{E}_{rad} \times \bar{H}_{rad} = c w \bar{n} \quad (8.8.112)$$

et que la densité d'impulsion électromagnétique devient

$$\bar{\mathbf{p}}^{e.m} = \bar{\mathbf{D}}_{rad} \times \bar{\mathbf{B}}_{rad} = \frac{w}{c} \bar{\mathbf{n}}. \quad (8.8.113)$$

De plus, si  $\bar{dS} = \bar{\mathbf{n}} dS$  est un élément de surface du plan d'onde, l'élément de flux d'impulsion vaut

$$- \sum_{\ell} dS_{\ell} T_{k\ell} = w dS_k. \quad (8.8.114)$$

L'énergie et l'impulsion électromagnétiques se propagent donc dans la direction de  $\bar{\mathbf{n}}$ , perpendiculairement au plan d'onde, à la vitesse de la lumière.

## 8.9 Moment cinétique

Des paragraphes précédents, il découle que les champs électromagnétiques (initialement introduits comme médiateurs de forces entre des charges) ont une existence propre. Ils transportent de l'**énergie** de densité

$$w^{em}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \frac{\epsilon_0}{2} (\bar{\mathbf{E}}^2 + c^2 \bar{\mathbf{B}}^2), \quad (8.9.115)$$

de l'**impulsion** dont la densité est

$$\bar{\mathbf{p}}^{em}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \epsilon_0 (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{B}}) \quad (8.9.116)$$

et aussi un **moment cinétique** dont la densité est donnée par

$$\bar{\ell}^{em}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \bar{\mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{p}}^{em} = \epsilon_0 \bar{\mathbf{x}} \times (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{B}}). \quad (8.9.117)$$

Même des champs parfaitement statiques recèlent une impulsion et un moment cinétique, à la condition que  $\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{B}} \neq 0$  et ce n'est que lorsque les contributions des champs sont prises en compte que les lois de conservation classiques de l'énergie, de l'impulsion et du moment cinétique peuvent être satisfaites.

## Chapitre 9

# Rayonnement électromagnétique

### 9.1 Rayonnement émis par des sources oscillantes localisées

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux potentiels, champs et rayonnement produits par des distributions de charges et de courants, dans le vide, localisées dans un volume  $V$  borné de l'espace et périodiques en  $t$  du type

$$\rho(\bar{x}, t) = \rho(\bar{x}) e^{-i\omega t} \quad (9.1.1)$$

$$\bar{j}(\bar{x}, t) = \bar{j}(\bar{x}) e^{-i\omega t}. \quad (9.1.2)$$

$\rho(\bar{x})$  et  $\bar{j}(\bar{x})$  sont des densités qui peuvent être complexes, la pulsation  $\omega$  est réelle. Il faudra prendre la **partie réelle** de ces expressions pour en extraire les grandeurs physiques. Les potentiels retardés (complexes eux aussi) produits par ces distributions sont donnés par

$$\phi(\bar{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho(\bar{x}') e^{-i(\omega t - k|\bar{x} - \bar{x}'|)}}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \quad (9.1.3)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} e^{-i\omega t} \int_V d^3x' \frac{\rho(\bar{x}') e^{ik|\bar{x} - \bar{x}'|}}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \quad (9.1.4)$$

$$\bar{A}(\bar{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\bar{j}(\bar{x}') e^{-i(\omega t - k|\bar{x} - \bar{x}'|)}}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \quad (9.1.5)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} e^{-i\omega t} \int_V d^3x' \frac{\bar{j}(\bar{x}') e^{ik|\bar{x} - \bar{x}'|}}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \quad (9.1.6)$$

où

$$k = \frac{\omega}{c}. \quad (9.1.7)$$

Les potentiels, donc aussi les champs (complexes ou physiques) sont périodiques en  $t$  de période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

La densité d'énergie physique du champ électromagnétique

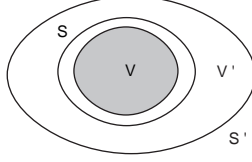
$$w_{phys} = \frac{\epsilon_0}{2} [ \bar{E}_{phys}^2 + c^2 \bar{B}_{phys}^2 ] \quad (9.1.8)$$



est donc aussi une fonction périodique en  $t$  de période  $T$ . Il en résulte que la puissance moyenne rayonnée par le système au travers d'une surface fermée  $S$  extérieure à  $V$ , soit

$$\mathcal{P} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \oint_S \bar{dS} \cdot \bar{S}_{phys} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \oint_S \bar{dS} \cdot (\bar{E} \times \bar{H})_{phys} \quad (9.1.9)$$

est indépendante du choix de la surface  $S$ .



En effet, prenons une seconde surface fermée  $S'$  qui entoure  $V$ , et considérons la différence

$$\oint_{S'} \bar{dS} \cdot \bar{S}_{phys} - \oint_S \bar{dS} \cdot \bar{S}_{phys} = \int_{V'} d^3x \bar{\nabla} \cdot \bar{S}_{phys} \quad (9.1.10)$$

$$= \int_{V'} d^3x (-) \partial_t w_{phys} \quad (9.1.11)$$

$$= -\frac{d}{dt} \int_{V'} d^3x w_{phys} \quad (9.1.12)$$

Pour obtenir ce résultat, nous avons appliqué Ostrogradsky et utilisé le bilan local d'énergie électromagnétique dans le vide et en l'absence de sources. L'intégrale de cette différence sur la période  $T$  est nulle, puisque l'énergie totale du champ contenue dans le volume  $V'$  limité par les deux surfaces est aussi une fonction périodique en  $t$  de période  $T$ . Ceci nous permet, dans le calcul de la puissance moyenne rayonnée, de choisir pour  $S$  la surface de la sphère dont le rayon tend vers l'infini, soit  $S_\infty$ , donc aussi de ne prendre en considération, dans l'expression des champs que les termes qui décroissent à l'infini comme  $r^{-1} = |\bar{x}|^{-1}$ , c'est-à-dire les champs de rayonnement. Nous pouvons donc utiliser les résultats établis au chapitre précédent.

Les champs électrique et magnétique de rayonnement se déduisent du champ

$$\bar{\Gamma}(\bar{x}, t) = \Re \left\{ -\frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V d^3x' \bar{j}(\bar{x}') \partial_t e^{-i(\omega t - k|\bar{x} - \bar{x}'|)} \right\} \quad (9.1.13)$$

$$= \Re \left\{ \frac{i\omega\mu_0}{4\pi r} e^{-i\omega t} \int_V d^3x' \bar{j}(\bar{x}') e^{ik|\bar{x} - \bar{x}'|} \right\} \quad (9.1.14)$$

## 9.2 Rayonnement dipolaire électrique

Nous nous intéresserons ici au cas où les sources sont confinées dans un volume  $V$  dont les dimensions sont petites par rapport à la longueur d'onde  $\lambda$ , c'est-à-dire, pour

$$|\bar{x}'| \ll \lambda = \frac{2\pi}{k}; \quad (9.2.15)$$

dans ces conditions, nous pouvons remplacer, dans l'intégrale (9.1.14),  $k|\bar{x} - \bar{x}'|$  par

$$k|\bar{x} - \bar{x}'| \simeq kr \sqrt{1 - \frac{2}{r} \bar{n} \cdot \bar{x}'} \simeq kr \left(1 - \frac{1}{r} \bar{n} \cdot \bar{x}'\right) \simeq kr - \frac{2\pi}{\lambda} \bar{n} \cdot \bar{x}' \simeq kr. \quad (9.2.16)$$

de sorte que

$$\bar{\Gamma}(\bar{x}, t) = \Re \left\{ \frac{i\omega\mu_0}{4\pi r} \int_V d^3x' \bar{j}(\bar{x}') e^{-i(\omega t - kr)} \right\} \quad (9.2.17)$$

$$= -\Re \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d}{dt} \int_V d^3x' \bar{j}(\bar{x}', t - \frac{r}{c}) \right\}. \quad (9.2.18)$$

En vertu de la loi locale de conservation de la charge électrique

$$\bar{\nabla}' \cdot \bar{j}(\bar{x}', t - \frac{r}{c}) = -\partial_t \rho(\bar{x}', t - \frac{r}{c}) \quad (9.2.19)$$

on a

$$\bar{\nabla}' \cdot (x'^\ell \bar{j}(\bar{x}', t - \frac{r}{c})) = j'_\ell(\bar{x}', t - \frac{r}{c}) + x'^\ell \bar{\nabla}' \cdot \bar{j}(\bar{x}', t - \frac{r}{c}). \quad (9.2.20)$$

On peut donc remplacer l'intégrale (9.2.18) par

$$\bar{\Gamma}(\bar{x}, t) = -\Re \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d^2}{dt^2} \int_V d^3x' \bar{x}' \rho(\bar{x}', t - \frac{r}{c}) \right\} \quad (9.2.21)$$

$$= -\Re \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d^2}{dt^2} \bar{p}(t - \frac{r}{c}) \right\} \quad (9.2.22)$$

faisant ainsi apparaître explicitement le moment dipolaire électrique  $\bar{p}(t - \frac{r}{c})$  de la distribution de charges.

Lorsque les différentes composantes de  $\bar{p}$  sont **en phase**, ce que nous supposons ici,  $\bar{p}(t) = \bar{p}_0 e^{-i\omega t}$ , avec  $\bar{p}_0$  réel, on a

$$\bar{\Gamma}(\bar{x}, t) = \frac{\omega^2 \mu_0}{4\pi r} \bar{p}_0 \cos(\omega t - kr), \quad (9.2.23)$$

et les champs de rayonnement sont donnés par [pour alléger l'écriture des formules, nous omettons la notation "rad"]

$$\bar{B}(\bar{x}, t) = \frac{\omega^2 \mu_0}{4\pi r c} (\bar{n} \times \bar{p}_0) \cos(\omega t - kr) \quad (9.2.24)$$

$$\bar{E}(\bar{x}, t) = -\frac{\omega^2 \mu_0}{4\pi r} [(\bar{n} \cdot \bar{p}_0) \bar{n} - \bar{p}_0] \cos(\omega t - kr) \quad (9.2.25)$$

et le vecteur de Poynting

$$\bar{S}(\bar{x}, t) = \bar{E}(\bar{x}, t) \times \bar{H}(\bar{x}, t) = \frac{\bar{n}}{c \mu_0} \bar{E}^2 \quad (9.2.26)$$

$$= \frac{\omega^4 \mu_0}{(4\pi)^2 r^2 c} [-(\bar{n} \cdot \bar{p}_0)^2 + \bar{p}_0^2] \bar{n} \cos^2(\omega t - kr) \quad (9.2.27)$$

Sa moyenne sur une période est donnée par

$$\langle \bar{S} \rangle = \frac{\omega^4 \mu_0}{2(4\pi)^2 r^2 c} [-(\bar{n} \cdot \bar{p}_0)^2 + \bar{p}_0^2] \bar{n} \quad (9.2.28)$$

donc la puissance moyenne rayonnée au travers de l'élément de surface  $d\bar{S} = \bar{n} r^2 d\Omega$  de la sphère  $S_{r \rightarrow \infty}$  vaut

$$d\mathcal{P} = \frac{\omega^4 \mu_0}{32\pi^2 c} [-(\bar{n} \cdot \bar{p}_0)^2 + \bar{p}_0^2] d\Omega = \frac{\omega^4 \mu_0}{32\pi^2 c} \bar{p}_0^2 \sin^2 \theta d\Omega \quad (9.2.29)$$

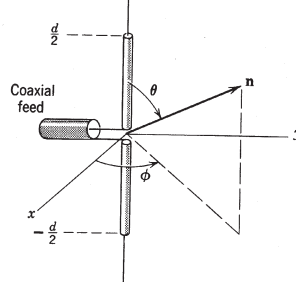
où l'angle  $\theta$  est l'angle entre  $\bar{p}_0$  et  $\bar{n}$ . La distribution angulaire du rayonnement est donnée par

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \frac{\omega^4 \mu_0}{32\pi^2 c} [-(\bar{n} \cdot \bar{p}_0)^2 + \bar{p}_0^2] = \frac{\omega^4 \mu_0}{32\pi^2 c} \bar{p}_0^2 \sin^2 \theta \quad (9.2.30)$$

La dépendance angulaire en  $\sin^2 \theta$  est caractéristique du rayonnement dipolaire. La puissance totale rayonnée, en moyenne sur une période, est donc égale à

$$\mathcal{P} = \frac{\omega^4 \mu_0}{4\pi c} \frac{1}{3} \bar{p}_0^2 = \frac{\omega^4 c}{4\pi \epsilon_0 c^4} \frac{1}{3} \bar{p}_0^2 = \frac{c k^4}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{3} \bar{p}_0^2. \quad (9.2.31)$$

### 9.3 Exemple: Antenne linéaire



Un exemple de dipôle rayonnant est fourni par une antenne linéaire, de longueur  $d \ll \lambda$ , située sur l'axe Oz entre  $z = \frac{d}{2}$  et  $z = -\frac{d}{2}$ , alimentée par un petit trou en son milieu. Le courant peut y être décrit par

$$\bar{j}(\bar{x}, t) = I_0 \left[1 - \frac{2|z|}{d}\right] e^{-i\omega t} \delta(x) \delta(y) \bar{I}_z. \quad (9.3.32)$$

De l'équation de conservation locale de la charge, on déduit la distribution de charges correspondante:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{j}(\bar{x}, t) = i\omega \rho(\bar{x}, t) \quad (9.3.33)$$

$$\rho(\bar{x}, t) = [\Theta(z) - \Theta(-z)] \frac{2i I_0}{\omega d} e^{-i\omega t} \delta(x) \delta(y). \quad (9.3.34)$$

Sa partie réelle est égale à

$$\rho_{phys}(\bar{x}, t) = [\Theta(z) - \Theta(-z)] \frac{2 I_0}{\omega d} \sin \omega t \delta(x) \delta(y). \quad (9.3.35)$$

Son moment dipolaire n'a qu'une seule composante  $p_z(t)$  donnée

$$p_z(t) = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dz \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy z \rho_{phys}(\bar{x}, t) \quad (9.3.36)$$

$$= \frac{d I_0}{2 \omega} \sin \omega t \quad (9.3.37)$$

La distribution angulaire du rayonnement, en moyenne sur une période, est

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \frac{\omega^2 \mu_0}{(4\pi)^2 c} \frac{d^2 I_0^2}{8} \sin^2 \theta \quad (9.3.38)$$

et la puissance totale rayonnée, en moyenne sur une période, est

$$\mathcal{P} = \frac{1}{12} \frac{\omega^2 d^2 I_0^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{I_0^2 k^2 d^2}{12(4\pi\epsilon_0) c}. \quad (9.3.39)$$

## Chapitre 10

# Ondes électromagnétiques planes

### 10.1 Ondes planes

Dans un milieu infini, linéaire, homogène, isotrope, non-dissipatif et non-conducteur et en l'absence de sources extérieures, les équations de Maxwell

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{D} = 0, \quad \bar{\nabla} \times \bar{E} = -\partial_t \bar{B} \quad (10.1.1)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0, \quad \bar{\nabla} \times \bar{H} = \partial_t \bar{D} \quad (10.1.2)$$

admettent des solutions non triviales qui peuvent se propager dans l'espace et dans le temps sous la forme d'ondes électromagnétiques. Comme nous l'avons montré au chapitre 2, à partir des équations de Maxwell dans le vide (mais les calculs sont identiques dans les types de milieux considérés ici), qu'en conséquence de ces équations les champs  $\bar{E}$  et  $\bar{B}$  obéissent à des équations du second ordre: en l'absence de sources, celles-ci se réduisent à des équations d'ondes

$$\square \bar{E}(\bar{x}, t) = 0, \quad \square \bar{B}(\bar{x}, t) = 0, \quad (10.1.3)$$

où

$$\square = \frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (10.1.4)$$

est le d'Alembertien;  $c'$  est la vitesse de la lumière dans le milieu considéré. En coordonnées cartésiennes, ce sont des équations séparées pour les trois composantes du champ électrique et pour les trois composantes de l'induction magnétique. Si on désigne par  $\psi(\bar{x}, t)$  l'une quelconque de ces composantes, elle satisfait donc l'équation

$$\square \psi(\bar{x}, t) = 0. \quad (10.1.5)$$

Cette équation admet une infinité de solutions du type ondes planes, c'ad, qui ne dépendent que de la seule variable

$$\xi = \hat{k} \cdot \bar{x} = \hat{k}_1 x^1 + \hat{k}_2 x^2 + \hat{k}_3 x^3 \quad (10.1.6)$$

où  $\hat{k}$  est un vecteur fixe de longueur unité,  $\hat{k}^2 = 1$ . Pour de telles solutions, càd, pour  $\psi(\bar{x}, t) = F(\xi, t)$ , l'équation (10.1.5) se réduit à une équation du type de la corde vibrante

$$\frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \quad (10.1.7)$$

dont les solutions s'écrivent comme

$$F(\xi, t) = f(\xi - c' t) + g(\xi + c' t), \quad (10.1.8)$$

où  $f$  et  $g$  sont, chacune, des fonctions arbitraires d'une seule variable. Noter que la surface d'équation

$$\xi = \text{constante} \quad (10.1.9)$$

est un plan orthogonal au vecteur  $\hat{k}$ . A tout instant  $t$ , la fonction  $f$  prend la même valeur en tous les points du plan d'équation  $\hat{k} \cdot \bar{x} = c' t + \text{constante}$  et la fonction  $g$  prend la même valeur en tous les points du plan  $\hat{k} \cdot \bar{x} = -c' t + \text{constante}$ . Chacun de ces plans est appelé "front d'onde"; au cours du temps, il se déplace parallèlement à lui-même, donc toujours perpendiculairement à  $\hat{k}$ , à la vitesse  $c'$  (respectivement  $-c'$ ), appelée *vitesse de phase*. Par la suite, nous ne considérerons que des solutions de type  $f$ , la généralisation est immédiate.

## 10.2 Ondes planes monochromatiques

Par définition, l'onde plane monochromatique est de la forme

$$\psi(\bar{x}, t) = \psi'_0 \cos(\bar{k} \cdot \bar{x} - \omega t) + \psi''_0 \sin(\bar{k} \cdot \bar{x} - \omega t) \quad (10.2.10)$$

$$= \psi'_0 \cos \varphi + \psi''_0 \sin \varphi, \quad (10.2.11)$$

où  $\bar{k}$  est le *vecteur d'onde* et  $\varphi$  est la *phase de l'onde*

$$\varphi = \bar{k} \cdot \bar{x} - \omega t \quad (10.2.12)$$

La *pulsation* ou *fréquence angulaire*  $\omega$  est liée au *vecteur d'onde*  $\bar{k}$  par la relation

$$\omega = c' |\bar{k}| = c' k, \quad (10.2.13)$$

appelée *relation de dispersion*. On préfère souvent utiliser au lieu de (10.2.11) une représentation complexe dont on prend la partie réelle

$$\psi(\bar{x}, t) = \Re(\psi_0 e^{i\varphi}), \quad (10.2.14)$$

avec

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (10.2.15)$$

et

$$\psi_0 = \psi'_0 - i\psi''_0. \quad (10.2.16)$$

Comme dans le chapitre précédent, nous nous permettrons un léger abus de notations en désignant l'onde complexe par

$$\psi(\bar{x}, t) = \psi_0 e^{i\bar{k} \cdot \bar{x} - i\omega t} = \psi_0 e^{ik[\hat{k} \cdot \bar{x} - c't]} = \psi_0 e^{ik(\hat{k} \cdot \bar{x})} e^{-i\omega t} \quad (10.2.17)$$

et nous conviendrons que seule sa partie réelle représente la solution physique:

$$\psi_{phys}(\bar{x}, t) = \Re \psi(\bar{x}, t). \quad (10.2.18)$$

Il est aussi commode de rapporter la vitesse de phase  $c'$  à la vitesse de la lumière dans le vide

$$c' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = c \frac{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n} \quad (10.2.19)$$

où  $n$  est l'indice de réfraction du milieu dans lequel l'onde se propage.

Les fonctions (10.2.17) sont des fonctions périodiques en  $t$  de *période*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (10.2.20)$$

donc aussi périodiques en la variable  $\xi = \hat{k} \cdot \bar{x}$  de période

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}; \quad (10.2.21)$$

$\lambda$  est la *longueur d'onde* dans le milieu considéré:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{n\omega}. \quad (10.2.22)$$

Les équations (10.1.3) admettent donc des solutions qui représentent des ondes planes monochromatiques (complexes) de la forme

$$\bar{E}(\bar{x}, t) = \bar{E}_0 e^{i\bar{k} \cdot \bar{x} - i\omega t} \quad (10.2.23)$$

$$\bar{B}(\bar{x}, t) = \bar{B}_0 e^{i\bar{k} \cdot \bar{x} - i\omega t} \quad (10.2.24)$$

où  $\bar{E}_0$  et  $\bar{B}_0$  sont des vecteurs constants (complexes) arbitraires. Les équations (10.1.3) étant linéaires à coefficients réels, on a les mêmes équations pour  $\Re \bar{E}$  et  $\Im \bar{E}$  de même que pour  $\Re \bar{B}$  et  $\Im \bar{B}$ . Rien ne nous garantit cependant que toutes les solutions des équations (10.1.3) sont aussi solutions des équations de Maxwell du premier ordre car, en règle générale, les équations du second ordre admettent plus de solutions que les équations du premier ordre.

De fait, il y a encore des conditions à satisfaire, à savoir

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{D} = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{k} \cdot \bar{E}_0 = 0 \quad (10.2.25)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0, \quad \rightarrow \quad \bar{k} \cdot \bar{B}_0 = 0 \quad (10.2.26)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\partial_t \bar{B} \quad \rightarrow \quad \bar{k} \times \bar{E}_0 = \omega \bar{B}_0 \quad (10.2.27)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \partial_t \bar{D} \quad \rightarrow \quad \bar{k} \times \bar{B}_0 = -\frac{1}{c'^2} \omega \bar{E}_0 \quad (10.2.28)$$

ou

$$\bar{B}_0 = \frac{n}{c} (\hat{k} \times \bar{E}_0) \quad \text{et} \quad \bar{B}_0 \times \hat{k} = \frac{n}{c} \bar{E}_0. \quad (10.2.29)$$

Ces relations sont fondamentales. Elles montrent que les vecteurs  $(\Re \bar{E}_0, \Re \bar{B}_0, \bar{k})$  de même que  $(\Im \bar{E}_0, \Im \bar{B}_0, \bar{k})$  sont orthogonaux les uns aux autres et qu'ils forment un trièdre dextrogyre. Les ondes électromagnétiques sont donc des ondes transverses

(orthogonales à  $\hat{k}$ ) et l'induction  $\bar{B}(\bar{x},t)$  est entièrement déterminée par  $\bar{E}(\bar{x},t)$ ; on a aussi

$$\frac{c^2}{n^2} (\Re \bar{B})^2 = (\Re \bar{E})^2 \quad , \quad \frac{c^2}{n^2} (\Im \bar{B})^2 = (\Im \bar{E})^2. \quad (10.2.30)$$

La densité d'énergie, la densité d'impulsion et le vecteur de Poynting de l'onde plane monochromatique sont respectivement

$$w(\bar{x},t) = \epsilon [\Re \bar{E}]^2 \quad (10.2.31)$$

$$\bar{p}_{e.m.}(\bar{x},t) = \hat{k} \frac{n}{c} w(\bar{x},t) \quad (10.2.32)$$

$$\bar{S}(\bar{x},t) = \frac{c^2}{n^2} \bar{p}_{e.m.} = \frac{c}{n} \hat{k} w, \quad (10.2.33)$$

avec

$$\Re \bar{E} = \frac{1}{2} [\bar{E} + \bar{E}^*] = \frac{1}{2} [\bar{E}_0 e^{i(\hat{k} \cdot \bar{x} - \omega t)} + \bar{E}_0^* e^{-i(\hat{k} \cdot \bar{x} - \omega t)}]. \quad (10.2.34)$$

On a aussi, avec  $\overline{dS} = \hat{k} dS$ ,

$$-T_{k\ell} dS_\ell = w dS_k \quad (10.2.35)$$

L'énergie et l'impulsion se propagent perpendiculairement au plan d'onde, à la vitesse de la lumière  $\frac{c}{n}$ . En moyenne sur une période, la densité d'énergie est constante, la densité d'impulsion et le vecteur de Poynting sont des vecteurs constants

$$\langle w \rangle = \epsilon \frac{1}{2} [\bar{E} \cdot \bar{E}^*] = \epsilon \frac{1}{2} [\bar{E}_0 \cdot \bar{E}_0^*] \quad (10.2.36)$$

$$\langle \bar{p}_{e.m.} \rangle = \hat{k} \frac{n}{c} \langle w \rangle \quad (10.2.37)$$

$$\langle \bar{S} \rangle = \frac{c^2}{n^2} \langle \bar{p}_{e.m.} \rangle = \frac{c}{n} \hat{k} \langle w \rangle. \quad (10.2.38)$$

Noter en effet que si  $A(t) = A_0 e^{-i\omega t}$  et  $B(t) = B_0 e^{-i\omega t}$ , la moyenne temporelle du produit de leurs valeurs réelles peut se calculer comme

$$\langle \Re A(t) \Re B(t) \rangle = \frac{1}{2} \Re (A(t) B(t)^*). \quad (10.2.39)$$

L'intensité de l'onde tombant sur l'élément de surface  $\overline{dS} = \bar{u} dS$  est reliée au flux du vecteur de Poynting moyen au travers de cet élément de surface par

$$I dS = \langle \bar{S} \rangle \cdot \overline{dS} = \langle w \rangle c' \hat{k} \cdot \bar{u} dS; \quad (10.2.40)$$

$I$  est donc la puissance moyenne, par unité d'aire, qui traverse la surface dans la direction  $\hat{k}$  ou encore l'énergie moyenne contenue dans le cylindre oblique de hauteur  $\bar{v} = c' \hat{k}$  et de base unité orthogonale à  $\bar{u}$ .

### 10.3 Transformée de Fourier

Sous des conditions précisées dans le cours d'analyse, par exemple pour  $\psi(\bar{x},t) \in S$  c'est-à-dire dans l'espace des fonctions  $C^\infty$  à décroissance rapide, la solution de



l'équation d'ondes (10.1.5) peut être recherchée sous la forme de son développement en intégrale de FOURIER

$$\psi(\bar{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{R^3} d^3k e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}} \tilde{\psi}(\bar{k}, t). \quad (10.3.41)$$

L'équation

$$\square \psi(\bar{x}, t) = 0 \quad (10.3.42)$$

se transforme, pour chaque  $\bar{k}$ , en une équation d'oscillateur linéaire harmonique pour la transformée de Fourier  $\tilde{\psi}(\bar{k}, t)$ , à savoir

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{\psi}(\bar{k}, t) = -\omega_k^2 \tilde{\psi}(\bar{k}, t), \quad (10.3.43)$$

avec  $\omega_k = c' |\bar{k}|$  et dont la solution peut s'écrire comme

$$\tilde{\psi}(\bar{k}, t) = \frac{1}{2\omega_k} [A(\bar{k}) e^{-i\omega_k t} + B^*(-\bar{k}) e^{i\omega_k t}]. \quad (10.3.44)$$

Les fonctions complexes  $A(\bar{k})$  et  $B^*(-\bar{k})$  sont des fonctions arbitraires de  $\bar{k}$  (qui peuvent p.ex. être déterminées par la donnée des conditions de Cauchy). En injectant (10.3.44) dans (10.3.41), la solution générale (à valeurs complexes) de l'équation d'ondes, développable en intégrale de Fourier s'écrit

$$\psi(\bar{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{R^3} \frac{d^3k}{2\omega_k} e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}} [A(\bar{k}) e^{-i\omega_k t} + B^*(-\bar{k}) e^{i\omega_k t}] \quad (10.3.45)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{R^3} \frac{d^3k}{2\omega_k} [A(\bar{k}) e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}} e^{-i\omega_k t} + B^*(-\bar{k}) e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}} e^{i\omega_k t}] \quad (10.3.46)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{R^3} \frac{d^3k}{2\omega_k} [A(\bar{k}) e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}} e^{-i\omega_k t} + B^*(\bar{k}) e^{-i\bar{k}\cdot\bar{x}} e^{i\omega_k t}]. \quad (10.3.47)$$

La solution générale, à valeurs réelles, s'écrit comme

$$\psi(\bar{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{R^3} \frac{d^3k}{2\omega_k} [A(\bar{k}) e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}-i\omega_k t} + A^*(\bar{k}) e^{-i\bar{k}\cdot\bar{x}+i\omega_k t}], \quad (10.3.48)$$

qui est une superposition de paires d'ondes planes monochromatiques. Pour tout  $\bar{k}$ , l'onde de fréquence positive ( $e^{-i\omega_k t}$ ) se propage dans la direction de  $\bar{k}$ , l'onde de fréquence négative ( $e^{i\omega_k t}$ ) se propage dans la direction de  $(-\bar{k})$ .

Appliqué au champ électromagnétique réel, tout ceci devient

$$\bar{E}(\bar{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{R^3} \frac{d^3k}{2\omega_k} [\tilde{E}(\bar{k}) e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}-i\omega_k t} + \tilde{E}^*(\bar{k}) e^{-i\bar{k}\cdot\bar{x}+i\omega_k t}] \quad (10.3.49)$$

$$\bar{B}(\bar{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{R^3} \frac{d^3k}{2\omega_k} [\tilde{B}(\bar{k}) e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}-i\omega_k t} + \tilde{B}^*(\bar{k}) e^{-i\bar{k}\cdot\bar{x}+i\omega_k t}]. \quad (10.3.50)$$

Les équations de Maxwell du premier ordre imposent encore les relations suivantes

$$\bar{k}\cdot\tilde{E}(\bar{k}) = 0, \quad \bar{k}\cdot\tilde{B}(\bar{k}) = 0, \quad \tilde{B}(\bar{k}) = \frac{n}{c} [\hat{k} \times \tilde{E}(\bar{k})] \quad (10.3.51)$$

où  $n$  est l'indice de réfraction du milieu.

## 10.4 Polarisations

Introduisons, au point  $\bar{x}$  du plan d'onde (plan orthogonal à  $\bar{k}$ ), une base orthonormée de vecteurs réels,  $\bar{e}_1$  et  $\bar{e}_2$ , qui forment avec  $\hat{k}$  un trièdre trirectangle dextrogyre

$$\hat{k} \cdot \bar{e}_1 = 0, \quad \hat{k} \cdot \bar{e}_2 = 0 \quad (10.4.52)$$

$$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 = 1, \quad \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = \hat{k}. \quad (10.4.53)$$

Le champ électrique en  $\bar{x}$  est dans le plan d'onde, il peut s'écrire comme combinaison linéaire de ces vecteurs

$$\bar{E}(\bar{x}, t) = (\bar{e}_1 E_0^1 + \bar{e}_2 E_0^2) e^{i\bar{k} \cdot \bar{x} - i\omega t} \quad (10.4.54)$$

où les composantes complexes  $E_0^1$  et  $E_0^2$  peuvent être réécrites comme

$$E_0^j = |E_0^j| e^{i\alpha_j}. \quad (10.4.55)$$

Le champ électrique physique (réel) est donc

$$\bar{E}_{phys}(\bar{x}, t) = \Re [\bar{e}_1 |E_0^1| e^{i\bar{k} \cdot \bar{x} - i\omega t + i\alpha_1} + \bar{e}_2 |E_0^2| e^{i\bar{k} \cdot \bar{x} - i\omega t + i\alpha_2}] \quad (10.4.56)$$

$$= \Re [(\bar{e}_1 |E_0^1| + \bar{e}_2 |E_0^2| e^{i(\alpha_2 - \alpha_1)}) e^{i\bar{k} \cdot \bar{x} - i\omega t + i\alpha_1}] \quad (10.4.57)$$

### 10.4.1 Polarisations rectilignes

Dans le cas où  $\alpha_2 - \alpha_1 = N\pi$ , avec  $N$  entier,

$$e^{i(\alpha_2 - \alpha_1)} = e^{iN\pi} = \begin{cases} 1 & \text{si } N \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } N \text{ est impair} \end{cases} \quad (10.4.58)$$

(10.4.57) se réduit alors à

$$\bar{E}_{phys}(\bar{x}, t) = (\bar{e}_1 |E_0^1| \pm \bar{e}_2 |E_0^2|) \cos(\bar{k} \cdot \bar{x} - \omega t + \alpha_1). \quad (10.4.59)$$

En  $\bar{x}$ , à tout instant  $t$ , le champ électrique a la même direction. On dit que l'onde possède une *polarisation rectiligne* ou qu'elle est polarisée dans la direction du vecteur  $\bar{a}_\pm = (\bar{e}_1 |E_0^1| \pm \bar{e}_2 |E_0^2|)$ .

### 10.4.2 Polarisations circulaires

Dans le cas où  $\alpha_2 - \alpha_1 = (2N + 1)\frac{\pi}{2}$ , avec  $N$  entier,

$$e^{i(\alpha_2 - \alpha_1)} = e^{i(2N+1)\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} i & \text{si } N \text{ est pair} \\ -i & \text{si } N \text{ est impair} \end{cases} \quad (10.4.60)$$

(10.4.57) devient alors

$$\bar{E}_{phys}(\bar{x}, t) = \Re [(\bar{e}_1 |E_0^1| \pm i\bar{e}_2 |E_0^2|) e^{i\bar{k} \cdot \bar{x} - i\omega t + i\alpha_1}] \quad (10.4.61)$$

$$= \bar{e}_1 |E_0^1| \cos(\bar{k} \cdot \bar{x} - \omega t + \alpha_1) - (\pm) \bar{e}_2 |E_0^2| \sin(\bar{k} \cdot \bar{x} - \omega t + \alpha_1). \quad (10.4.62)$$

De plus, si

$$|E_0^1| = |E_0^2|, \quad (10.4.63)$$

(10.4.62) devient

$$\bar{E}_{phys}(\bar{x}, t) = |E_0^1| \Re [(\bar{e}_1 \pm i\bar{e}_2) e^{i\bar{k} \cdot \bar{x} - i\omega t + i\alpha_1}] \quad (10.4.64)$$

$$= |E_0^1| [\bar{e}_1 \cos(\bar{k} \cdot \bar{x} - \omega t + \alpha_1) - (\pm) \bar{e}_2 \sin(\bar{k} \cdot \bar{x} - \omega t + \alpha_1)]. \quad (10.4.65)$$

qui décrit, pour  $\bar{x}$  fixé, une circonférence centrée à l'origine, de rayon  $|E_0^1|$ . Dans le plan d'onde, le champ électrique (donc aussi le champ magnétique) tourne à la fréquence  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  dans un sens qui dépend de la parité de  $N$ : si  $N$  est pair, en regardant l'onde venir vers soi, on voit le vecteur  $\bar{E}$  tourner dans le sens opposé à celui des aiguilles d'une montre. On dit que l'onde possède une *polarisation circulaire gauche ou hélicité positive*. Tandis que si  $N$  est impair, le champ électrique tourne dans le sens des aiguilles d'une montre; l'onde possède une *polarisation circulaire droite ou hélicité négative*.

### 10.4.3 Polarisation elliptiques

Dans le cas où  $|E_0^1| \neq |E_0^2|$ , le champ électrique (10.4.62) décrit, à  $\bar{x}$  constant, une ellipse. On parle alors de *polarisation elliptique gauche* ou droite selon le sens de parcours décrit ci-dessus.

Le champ électrique d'une onde plane (10.4.54) générale est superposition linéaire de deux champs polarisés linéairement suivant  $\bar{e}_1$  et  $\bar{e}_2$  ou de deux champs polarisés circulairement suivant  $\bar{e}_+ = \bar{e}_1 + i\bar{e}_2$  et  $\bar{e}_- = \bar{e}_1 - i\bar{e}_2$ .

## 10.5 Réflexion et transmission d'ondes monochromatiques planes entre deux diélectriques

Nous considérons ici la réflexion et la réfraction d'ondes monochromatiques planes sur le plan ( $z = 0$ ) séparant deux milieux diélectriques linéaires, homogènes et isotropes caractérisés par  $(\epsilon_1, \mu_1)$  et  $(\epsilon_2, \mu_2 = \mu_1)$ .

Le plan incident est le plan engendré par les vecteurs  $(\bar{k}_1, \bar{n} = \bar{I}_z)$ , soit ici, le plan  $(x, z)$ .

L'onde incidente est représentée par les champs

$$\bar{E}_1 = \bar{E}_{01} e^{i(\bar{k}_1 \cdot \bar{x} - \omega_1 t)}, \quad \bar{B}_1 = \frac{1}{\omega_1} \bar{k}_1 \times \bar{E}_1. \quad (10.5.66)$$

L'onde réfléchie est représentée par

$$\bar{E}_2 = \bar{E}_{02} e^{i(\bar{k}_2 \cdot \bar{x} - \omega_2 t)}, \quad \bar{B}_2 = \frac{1}{\omega_2} \bar{k}_2 \times \bar{E}_2. \quad (10.5.67)$$

L'onde transmise ou réfractée est représentée par

$$\bar{E}_3 = \bar{E}_{03} e^{i(\bar{k}_3 \cdot \bar{x} - \omega_3 t)}, \quad \bar{B}_3 = \frac{1}{\omega_3} \bar{k}_3 \times \bar{E}_3. \quad (10.5.68)$$

Les vecteurs d'ondes sont reliés aux fréquences par

$$k_1 = \frac{\omega_1}{c} n_1 \quad (10.5.69)$$

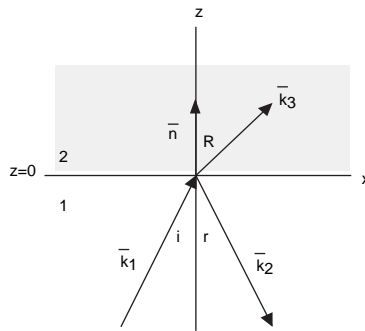
$$k_2 = \frac{\omega_2}{c} n_1 \quad (10.5.70)$$

$$k_3 = \frac{\omega_3}{c} n_2 \quad (10.5.71)$$

où  $n_1$  et  $n_2$  sont les indices de réfraction des milieux 1 et 2,

$$n_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_0 \mu_0}}; \quad n_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (10.5.72)$$

### 10.5.1 Lois de la Réflexion et de la Réfraction



A la limite,  $z=0$ , les composantes normales de  $\vec{D}$  et  $\vec{B}$  doivent être continues, il en va de même des composantes tangentielles de  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  parce qu'il n'y a ni charges ni courants en surface. Ces conditions doivent être satisfaites en  $z = 0$ , mais  $\forall x, \forall y, \forall t$ . Puisque les  $\vec{E}_{0j}$  sont des vecteurs constants, les phases doivent être égales en  $z = 0$ :

$$k_{1x}x + k_{1y}y - \omega_1 t = k_{2x}x + k_{2y}y - \omega_2 t = k_{3x}x + k_{3y}y - \omega_3 t, \quad (10.5.73)$$

en  $x = 0 = y$ , et  $\forall t$ , on en déduit l'égalité des fréquences  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ ; en  $t = 0 = y$  et  $\forall x$ , on en déduit  $k_{1x} = k_{2x} = k_{3x}$ ; en  $t = 0 = x$  et  $\forall y$ , on en déduit  $k_{1y} = 0 = k_{2y} = k_{3y}$ . Les trois vecteurs  $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$  sont donc dans le plan d'incidence. L'égalité  $\omega_1 = \omega_2$  implique  $k_1 = k_2$ . En notant  $i$  l'angle d'incidence,  $r$  l'angle de réflexion, et  $R$  l'angle de réfraction, on a

$$k_{1x} = k_1 \sin i = k_{2x} = k_2 \sin r, \quad \rightarrow \quad i = r. \quad (10.5.74)$$

**L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.** De plus

$$k_{1x} = k_1 \sin i = k_{3x} = k_3 \sin R \quad \rightarrow \quad \frac{\sin i}{\sin R} = \frac{k_3}{k_1} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (10.5.75)$$

*C'est la loi de Snell.*

## 10.5.2 Amplitudes des ondes réfléchié et transmise Equations de Fresnel

Avec

$$k_{1x} = k_1 \sin i, \quad k_{1y} = 0, \quad k_{1z} = k_1 \cos i \quad (10.5.76)$$

$$k_{2x} = k_1 \sin r, \quad k_{2y} = 0, \quad k_{2z} = -k_1 \cos r \quad (10.5.77)$$

$$k_{3x} = k_3 \sin R, \quad k_{3y} = 0, \quad k_{3z} = k_3 \cos R, \quad (10.5.78)$$

et les relations d'orthogonalité  $\bar{k}_j \cdot \bar{E}_{0j} = 0, j = 1, 2, 3$ , d'où l'on tire

$$E_{01z} = -\frac{\sin i}{\cos i} E_{01x}, \quad E_{02z} = \frac{\sin r}{\cos r} E_{02x}, \quad E_{03z} = -\frac{\sin R}{\cos R} E_{03x}, \quad (10.5.79)$$

on obtient

$$B_{01x} = -\frac{n_1}{c} \cos i E_{01y} \quad B_{02x} = \frac{n_1}{c} \cos r E_{02y} \quad (10.5.80)$$

$$B_{01y} = \frac{n_1}{c \cos i} E_{01x} \quad B_{02y} = -\frac{n_1}{c \cos r} E_{02x} \quad (10.5.81)$$

$$B_{01z} = \frac{n_1}{c} \sin i E_{01y} \quad B_{02z} = \frac{n_1}{c} \sin r E_{02y} \quad (10.5.82)$$

$$B_{03x} = -\frac{n_2}{c} \cos R E_{03y} \quad B_{03y} = \frac{n_2}{c \cos R} E_{03x} \quad (10.5.83)$$

$$B_{03z} = \frac{n_2}{c} \sin R E_{03y}. \quad (10.5.84)$$

Les conditions limites à satisfaire sont

1) la continuité de la composante normale de  $\bar{D}$ :

$$\epsilon_1 [E_{01z} + E_{02z}] = \epsilon_2 E_{03z} \quad (10.5.85)$$

2) la continuité des composantes tangentielles de  $\bar{E}$ :

$$E_{01x} + E_{02x} = E_{03x} \quad (10.5.86)$$

$$E_{01y} + E_{02y} = E_{03y} \quad (10.5.87)$$

3) la continuité de la composante normale de  $\bar{B}$ :

$$B_{01z} + B_{02z} = B_{03z} \quad (10.5.88)$$

4) la continuité des composantes tangentielles de  $\bar{H}$  qui, avec  $\mu_1 = \mu_2$  s'exprime comme la continuité des composantes tangentielles de  $\bar{B}$ :

$$B_{01x} + B_{02x} = B_{03x} \quad (10.5.89)$$

$$B_{01y} + B_{02y} = B_{03y}. \quad (10.5.90)$$

Avec (10.5.81) et  $i = r$ , (10.5.90) devient

$$E_{01x} - E_{02x} = \frac{n_2}{n_1} \frac{\cos i}{\cos R} E_{03x}. \quad (10.5.91)$$

avec (10.5.86), on en tire

$$E_{01x} = \frac{1}{2} E_{03x} \left[ 1 + \frac{n_2 \cos i}{n_1 \cos R} \right] \quad (10.5.92)$$

$$E_{02x} = \frac{1}{2} E_{03x} \left[ 1 - \frac{n_2 \cos i}{n_1 \cos R} \right] \quad (10.5.93)$$

(10.5.89) avec (10.5.80) donnent

$$E_{01y} - E_{02y} = \frac{n_2 \cos R}{n_1 \cos i} E_{03y} \quad (10.5.94)$$

qui, avec (10.5.87) donne

$$E_{01y} = \frac{1}{2} E_{03y} \left[ 1 + \frac{n_2 \cos R}{n_1 \cos i} \right] \quad (10.5.95)$$

$$E_{02y} = \frac{1}{2} E_{03y} \left[ 1 - \frac{n_2 \cos R}{n_1 \cos i} \right]. \quad (10.5.96)$$

Pour simplifier l'analyse de ces équations, nous considérerons séparément deux cas particuliers de polarisations rectilignes de l'onde incidente. Le cas général s'obtient en superposant ces résultats particuliers.

### Polarisation incidente perpendiculaire au plan d'incidence

$$E_{01x} = E_{01z} = 0 \quad (10.5.97)$$

Dans ce cas

$$E_{02x} = E_{02z} = E_{03x} = E_{03z} = 0. \quad (10.5.98)$$

et

$$\frac{E_{02y}}{E_{01y}} = \frac{n_1 \cos i - n_2 \cos R}{n_1 \cos i + n_2 \cos R} \quad (10.5.99)$$

$$\frac{E_{03y}}{E_{01y}} = \frac{2 n_1 \cos i}{n_1 \cos i + n_2 \cos R} \quad (10.5.100)$$

Avec

$$\gamma = \frac{\cos i}{\cos R}, \quad \beta = \frac{n_2}{n_1} \quad (10.5.101)$$

ceci se récrit comme

$$|\bar{E}_{02}| = \left( \frac{\gamma - \beta}{\gamma + \beta} \right) |\bar{E}_{01}|, \quad |\bar{E}_{03}| = \left( \frac{2\gamma}{\gamma + \beta} \right) |\bar{E}_{01}| \quad (10.5.102)$$

La puissance, par unité d'aire, qui frappe la surface de séparation est  $\bar{S} \cdot \bar{I}_z$ . L'intensité de l'onde incidente est

$$I_i = \frac{1}{2} \epsilon_1 c'_1 |\bar{E}_{01}|^2 \cos i, \quad c'_1 = \frac{c}{n_1} \quad (10.5.103)$$

tandis que les intensités réfléchie et transmise sont respectivement

$$I_r = \frac{1}{2} \epsilon_1 c'_1 |\bar{E}_{02}|^2 \cos r, \quad I_R = \frac{1}{2} \epsilon_2 c'_2 |\bar{E}_{03}|^2 \cos R, \quad c'_2 = \frac{c}{n_2}. \quad (10.5.104)$$

Les coefficients de réflexion et de transmission sont donnés par

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{\gamma - \beta}{\gamma + \beta}\right)^2, \quad T = \frac{I_R}{I_i} = \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{2\gamma}{\gamma + \beta}\right)^2. \quad (10.5.105)$$

$R + T = 1$ . Noter que l'onde réfléchie pourrait s'annuler si

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\cos R}{\cos i} \quad (10.5.106)$$

mais, combinée à la loi de Snell, cette condition implique i) l'égalité des angles d'incidence et de réfraction et ii) l'identité des deux milieux.

### Polarisation incidente parallèle au plan d'incidence

$$E_{01y} = 0 \quad (10.5.107)$$

Dans ce cas

$$E_{02y} = E_{03y} = 0. \quad (10.5.108)$$

et

$$\frac{E_{02x}}{E_{01x}} = \frac{n_1 \cos R - n_2 \cos i}{n_1 \cos R + n_2 \cos i} \quad (10.5.109)$$

$$\frac{E_{03x}}{E_{01x}} = \frac{2 n_1 \cos R}{n_1 \cos R + n_2 \cos i}. \quad (10.5.110)$$

On trouve alors que

$$|\bar{E}_{01}| = \sqrt{E_{01x}^2 + E_{01z}^2} = \left| \frac{E_{01x}}{\cos i} \right| \quad (10.5.111)$$

$$|\bar{E}_{02}| = \sqrt{E_{02x}^2 + E_{02z}^2} = \left| \frac{E_{02x}}{\cos r} \right| \quad (10.5.112)$$

$$|\bar{E}_{03}| = \sqrt{E_{03x}^2 + E_{03z}^2} = \left| \frac{E_{03x}}{\cos R} \right| \quad (10.5.113)$$

donc aussi

$$\frac{|\bar{E}_{02}|}{|\bar{E}_{01}|} = \left| \frac{n_1 \cos R - n_2 \cos i}{n_1 \cos R + n_2 \cos i} \right| \quad (10.5.114)$$

$$\frac{|\bar{E}_{03}|}{|\bar{E}_{01}|} = \left| \frac{2 n_1 \cos i}{n_1 \cos R + n_2 \cos i} \right| \quad (10.5.115)$$

Avec

$$\alpha = \frac{1}{\gamma} = \frac{\cos R}{\cos i}, \quad \beta = \frac{n_2}{n_1} \quad (10.5.116)$$

ceci se récrit sous la forme

$$|\bar{E}_{02}| = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right) |\bar{E}_{01}|, \quad |\bar{E}_{03}| = \left(\frac{2}{\alpha + \beta}\right) |\bar{E}_{01}| \quad (10.5.117)$$

Les coefficients de réflexion et de transmission pour des ondes polarisées parallèlement au plan d'incidence sont donnés par

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)^2, \quad T = \frac{I_R}{I_i} = \alpha \beta \left(\frac{2}{\alpha + \beta}\right)^2 \quad (10.5.118)$$

On a bien aussi  $R + T = 1$ .

## Commentaires

1) L'amplitude ( $|\bar{E}_{02}|$ ) de l'onde réfléchie s'annule dans ((10.5.114)) si

$$n_1 \cos R - n_2 \cos i = 0 = -n_2 \cos i + n_1 \sqrt{1 - \sin^2 R} \quad (10.5.119)$$

$$= -n_2 \cos i + \frac{n_1}{n_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} \quad (10.5.120)$$

soit pour un angle d'incidence  $i_B$  tel que

$$\operatorname{tg} i_B = \frac{n_2}{n_1}. \quad (10.5.121)$$

$i_B$  est l'angle de Brewster. Pour  $i = i_B$ , même si la polarisation de l'onde incidente est superposition linéaire de polarisations l'une perpendiculaire, l'autre parallèle au plan d'incidence, l'onde réfléchie sera toujours polarisée perpendiculairement au plan d'incidence. C'est une manière de produire des ondes polarisées, par réflexion.

2) Pour  $R = \frac{\pi}{2}$ ,  $\sin R = 1$ , soit pour un angle d'incidence  $i_0$  tel que

$$\sin i_0 = \frac{n_2}{n_1}, \quad (10.5.122)$$

l'onde réfractée se propage parallèlement au plan  $z = 0$ ; il n'y a pas de flux d'énergie qui traverse la surface. On dit qu'il y a réflexion totale interne. Ceci n'est évidemment possible que si  $n_1 > n_2$ .

## 10.6 Absorption

### 10.6.1 Ondes électromagnétiques dans un conducteur [3]

Dans le cas des conducteurs, on ne contrôle pas la circulation des charges libres; en règle générale, leur courant est non nul. En fait, en vertu de la loi d'Ohm, la densité de courant des charges libres est proportionnelle au champ électrique: avec  $\sigma$  comme paramètre de conductivité,

$$\bar{j}_f(\bar{x}, t) = \sigma \bar{E}(\bar{x}, t). \quad (10.6.123)$$

Les équations de Maxwell dans un milieu linéaire conducteur ont la forme

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho_f, \quad \bar{\nabla} \times \bar{E} = -\partial_t \bar{B} \quad (10.6.124)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0, \quad \bar{\nabla} \times \bar{B} = \epsilon \mu \partial_t \bar{E} + \mu \sigma \bar{E}. \quad (10.6.125)$$

L'équation de continuité pour les charges libres fournit

$$\partial_t \rho_f = -(\bar{\nabla} \cdot \sigma \bar{E}) = -\frac{\sigma}{\epsilon} \rho_f. \quad (10.6.126)$$

On en tire que

$$\rho_f(\bar{x}, t) = \rho_f(\bar{x}, 0) e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}. \quad (10.6.127)$$

Toute densité de charge libre  $\rho_f(\bar{x}, 0)$  se dissipe en un temps caractéristique  $\tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$ , d'autant plus court que le conducteur est "meilleur". Pour un conducteur parfait,



$\sigma \rightarrow \infty$  donc  $\tau \rightarrow 0$ . Après une période transitoire de quelques  $\tau$ , la densité  $\rho_f \rightarrow 0$ ; cette période transitoire ne nous intéresse pas ici, nous considérerons donc d'emblée que  $\rho_f = 0$ . En prenant le rotationnel des deux membres de la loi de Faraday et de la loi d'Ampère-Maxwell, on obtient des équations séparées pour  $\bar{E}$  et  $\bar{B}$  qui sont

$$\square \bar{E} + \mu\sigma \partial_t \bar{E} = 0 \quad (10.6.128)$$

$$\square \bar{B} + \mu\sigma \partial_t \bar{B} = 0. \quad (10.6.129)$$

Ces équations admettent encore des solutions ondes planes monochromatiques. Considérons, par exemple, une onde plane de pulsation  $\omega$  qui se propage dans la direction  $\bar{1}_z$

$$\bar{E}(z,t) = \bar{E}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)}, \quad \bar{B}(z,t) = \bar{B}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)}, \quad (10.6.130)$$

elle satisfait les équations ci-dessus à la condition que  $\tilde{k}$  soit un nombre complexe qui vérifie

$$\tilde{k}^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega. \quad (10.6.131)$$

Avec

$$\tilde{k} = \Re\tilde{k} + i\Im\tilde{k} = k + i\kappa, \quad (10.6.132)$$

on trouve

$$k = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} [\sqrt{1 + (\frac{\sigma}{\epsilon\omega})^2} + 1]^{\frac{1}{2}}}, \quad \kappa = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} [\sqrt{1 + (\frac{\sigma}{\epsilon\omega})^2} - 1]^{\frac{1}{2}}}. \quad (10.6.133)$$

La partie imaginaire de  $\tilde{k}$  est responsable d'une atténuation de l'onde, càd, d'une décroissance exponentielle de l'amplitude quand  $z$  augmente

$$\bar{E}(z,t) = \bar{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)}, \quad \bar{B}(z,t) = \bar{B}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)}. \quad (10.6.134)$$

Lorsque  $\frac{\sigma}{\epsilon\omega}$  n'est pas négligeable par rapport à 1,  $\kappa \neq 0$  et le milieu est dit absorbant. La distance

$$d = \frac{1}{\kappa} \quad (10.6.135)$$

sur laquelle l'amplitude est réduite d'un facteur  $e$  est la profondeur de peau. La partie réelle de  $\tilde{k}$  définit la longueur d'onde, la vitesse de propagation et l'indice de réfraction par les formules habituelles

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad c' = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}, \quad n = \frac{ck}{\omega}. \quad (10.6.136)$$

Comme précédemment, les équations de Maxwell imposent des relations entre  $\bar{E}$  et  $\bar{B}$ : par exemple, si on oriente les axes de coordonnées de sorte que  $\bar{E}$  soit polarisé dans la direction  $\bar{1}_x$ , avec  $E_0 = |E_0| e^{i\delta_E}$ ,

$$\bar{E}(z,t) = |E_0| e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t + \delta_E)} \bar{1}_x, \quad (10.6.137)$$

la loi de Faraday donne

$$\bar{B}(z,t) = \frac{\tilde{k}}{\omega} |E_0| e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t + \delta_E)} \bar{1}_y, \quad (10.6.138)$$

qui, avec

$$\tilde{k} = K e^{i\delta}, \quad K = |\tilde{k}| = \omega \sqrt{\epsilon\mu} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} \quad (10.6.139)$$

donne finalement

$$\bar{B}(z,t) = \frac{K}{\omega} |E_0| e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t + \delta_E + \delta)} \bar{1}_y. \quad (10.6.140)$$

Les champs électrique et magnétique sont transverses, ils sont orthogonaux l'un à l'autre, mais ils sont déphasés de  $\delta$  (qui est la phase de  $\tilde{k}$ ).

Noter que l'intensité de l'onde, proportionnelle au vecteur de Poynting, décroît quand  $z$  augmente comme  $e^{-2\kappa z}$ .

## 10.6.2 Réflexion à la surface d'un conducteur

Les conditions aux limites à la surface de séparation entre le milieu 1 (diélectrique,  $\epsilon_1, \mu_1$ ) et le milieu 2 (conducteur,  $\epsilon_2, \mu_2 = \mu_1 = \mu$ ) sont cette fois

$$\bar{n} \cdot (\epsilon_2 \bar{E}_2 - \epsilon_1 \bar{E}_1) = \sigma_f, \quad \bar{n} \times (\bar{E}_2 - \bar{E}_1) = 0 \quad (10.6.141)$$

$$\bar{n} \cdot (\bar{B}_2 - \bar{B}_1) = 0, \quad \bar{n} \times (\bar{B}_2 - \bar{B}_1) = \mu \bar{k}_f. \quad (10.6.142)$$

où  $\bar{n}$  est le vecteur unité normal à la surface, pointant du milieu 1 vers le milieu 2.

Notons d'abord que pour des conducteurs "ohmiques" ( $\bar{j}_f = \sigma \bar{E}$ ,  $\sigma$  fini) il ne peut pas y avoir de courant libre en surface: en effet,  $\bar{k}_f \neq 0$  vient d'un  $\bar{j}_f$  singulier à la surface ce qui nécessite un champ électrique  $\infty$  à la surface. On posera donc  $\bar{k}_f = 0$  dans les conditions limites ci-dessus.

Soit  $z = 0$  le plan séparant les deux milieux. Considérons, pour des raisons de simplicité, une onde plane monochromatique incidente, voyageant dans la direction  $\bar{1}_z$  (incidence normale) et polarisée dans la direction  $\bar{1}_x$ ; elle est décrite par

$$\bar{E}_i(z,t) = E_{0i} e^{i(k_1 z - \omega t)} \bar{1}_x \quad \bar{B}_i(z,t) = \frac{n_1}{c} E_{0i} e^{i(k_1 z - \omega t)} \bar{1}_y. \quad (10.6.143)$$

Elle donne naissance à une onde réfléchie

$$\bar{E}_r(z,t) = E_{0r} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \bar{1}_x \quad \bar{B}_r(z,t) = -\frac{n_1}{c} E_{0r} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \bar{1}_y \quad (10.6.144)$$

et à une onde transmise

$$\bar{E}_t(z,t) = E_{0t} e^{i(\tilde{k}_2 z - \omega t)} \bar{1}_x \quad \bar{B}_t(z,t) = \frac{\tilde{k}_2}{\omega} E_{0t} e^{i(\tilde{k}_2 z - \omega t)} \bar{1}_y \quad (10.6.145)$$

qui est atténuée en pénétrant dans le conducteur. Puisque la composante normale (suivant  $\bar{1}_z$ ) du champ électrique est nulle dans les deux milieux, il faut que  $\sigma_f = 0$ . La continuité de la composante normale de l'induction est automatiquement satisfaite. La continuité de la composante tangentielle du champ électrique impose

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \quad (10.6.146)$$

et la continuité de la composante tangentielle de l'induction impose

$$\frac{n_1}{c} (E_{0i} - E_{0r}) = \frac{\tilde{k}_2}{\omega} E_{0t}. \quad (10.6.147)$$

En termes du nombre complexe

$$\tilde{\beta} = \frac{c \tilde{k}_2}{n_1 \omega}, \quad (10.6.148)$$

on en tire

$$E_{0r} = \left( \frac{1 - \tilde{\beta}}{1 + \tilde{\beta}} \right) E_{0i}, \quad E_{0t} = \left( \frac{2}{1 + \tilde{\beta}} \right) E_{0i}. \quad (10.6.149)$$

Pour un conducteur parfait,  $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $\tilde{k}_2 \rightarrow \infty$ , donc  $\tilde{\beta} \rightarrow \infty$ , et

$$E_{0r} = -E_{0i}, \quad E_{0t} = 0. \quad (10.6.150)$$

Dans ce cas, l'onde est totalement réfléchie avec un déphasage de  $\pi$ . Les excellents conducteurs font de bons miroirs!

### 10.6.3 Pression de radiation [2]

Considérons une onde plane monochromatique polarisée linéairement, tombant, avec une incidence normale, sur une plaque de matériau qui l'absorbe complètement (corps noir). On choisit l'axe des "x" comme direction de propagation, l'axe "y" comme direction de  $\bar{E}$ , donc l'axe "z" donne la direction de  $\bar{B}$ .

$$\bar{E} = \bar{1}_y E_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (10.6.151)$$

$$\bar{B} = -i \frac{1}{\omega} \nabla \times \bar{E} = \bar{1}_z \frac{k}{\omega} E_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (10.6.152)$$

Pour une telle onde, le tenseur des tensions de Maxwell

$$T_{k\ell} = \epsilon [E_k E_\ell + c'^2 B_k B_\ell - \frac{1}{2} \delta_{k\ell} (\bar{E}^2 + c'^2 \bar{B}^2)] \quad (10.6.153)$$

$$= \epsilon [E_k E_\ell + c'^2 B_k B_\ell] - \delta_{k\ell} w \quad (10.6.154)$$

prend la forme

$$T = \begin{pmatrix} -w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.6.155)$$

Cette forme particulière se comprend puisque l'impulsion de ce champ est dirigée suivant l'axe Ox et est transportée dans la direction  $\bar{1}_x$ . Rappelons que  $-T_{xx}$  est la x-ème composante de l'impulsion qui traverse l'unité d'aire orientée suivant  $\bar{1}_x$  par unité de temps

$$-T_{xx} = w = p_x^{e.m.} c \quad (10.6.156)$$

Puisque les champs tombant sur la plaque sont absorbés, ils cèdent à cette plaque toute l'impulsion qu'ils transportent. Pendant un temps  $\Delta t$ , l'impulsion transférée à la surface  $A$  de la plaque est donnée par

$$\Delta p_x = \langle p_x^{e.m.} \rangle A c \Delta t, \quad (10.6.157)$$

de sorte que la pression de radiation (force moyenne par unité d'aire) est

$$P_{rad} = \frac{1}{A} \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \langle p_x^{e.m.} \rangle c = \langle w \rangle. \quad (10.6.158)$$

On peut expliquer qualitativement cette pression de la façon suivante: le champ électrique déplace les charges de la plaque dans la direction  $\bar{I}_y$  et l'induction magnétique exerce sur ces charges en mouvement une force  $q \bar{v} \times \bar{B}$  orientée suivant  $\bar{I}_x$ . La force nette sur toutes les charges de la surface produit la pression de radiation.

## 10.7 Dispersion

Dans beaucoup de matériaux, on constate que  $\epsilon$  et  $\sigma$  ne sont pas des vraies constantes, mais qu'elles dépendent de la pulsation  $\omega$ . Si la permittivité  $\epsilon$  était une vraie constante, l'indice de réfraction  $n \simeq \sqrt{\epsilon_r}$  serait constant lui aussi, mais on sait, par l'optique, que  $n$  est fonction de la longueur d'onde. Ce phénomène est appelé *dispersion*. Par extension, tous les milieux dans lesquels la vitesse de la lumière  $\frac{c}{n}$  dépend de la fréquence sont dits *dispersifs*. La dispersion possible de  $\mu$  est beaucoup moins importante.

Rappelons que ce sont principalement les électrons qui sont responsables à la fois de la polarisation et de la conduction.

Quand un électron est soumis à un champ électrique oscillant au cours du temps, à la fréquence  $\omega$ , son mouvement est contrôlé par divers facteurs:

1) Si l'électron est lié, il existe une force de rappel intra-atomique (par ex. une force de rappel harmonique) qui, déjà en l'absence de champ extérieur, agit sur l'électron avec une fréquence propre  $\omega_0$  qui dépend de la structure de l'atome et une force de friction liée au rayonnement émis par l'électron qui décélère.

2) Si l'électron est libre,  $\omega_0 = 0$ ; il y a toujours une force de freinage due au rayonnement mais surtout aux collisions.

### 10.7.1 Un modèle simple pour $\epsilon(\omega)$

Le mouvement d'un électron sur lequel agit un champ électrique peut être décrit par l'équation

$$\ddot{x}(t) + \beta \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{e}{m} \bar{E}(t) \quad (10.7.159)$$

qui est celle d'un oscillateur harmonique, forcé et amorti. Dans un milieu de faible densité, nous pouvons négliger la différence entre le champ extérieur et le champ local qui s'applique sur l'électron. Si le champ oscille à la fréquence  $\omega \neq \omega_0$  comme  $\bar{E}(t) = \bar{E}_0 e^{-i\omega t}$ , l'équation (10.7.159) admet comme solution

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_0 e^{-i\omega t} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\beta\omega} \frac{e}{m} \bar{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (10.7.160)$$

Dans un diélectrique "pur", tous les électrons sont liés et  $\omega_0$  est toujours  $\neq 0$ . L'effet du champ est de produire une polarisation, fonction du temps

$$\bar{P}_\omega(t) = N e \bar{x}(t) \quad (10.7.161)$$

où  $N$  est ici le nombre d'électrons par unité de volume, donc

$$\bar{P}_\omega(t) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\beta\omega} \frac{N e^2}{m} \bar{E}. \quad (10.7.162)$$

En rappelant la définition de la susceptibilité électrique

$$\bar{P}_\omega = \epsilon_0 \chi \bar{E} \quad (10.7.163)$$

on voit que

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\beta\omega} \frac{N e^2}{m \epsilon_0} \quad (10.7.164)$$

ou

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 [1 + \chi(\omega)]. \quad (10.7.165)$$

La formule (10.7.164) peut être affinée si on tient compte du fait que les différents électrons peuvent être soumis à des forces de rappel et de freinage différentes. On trouve donc une permittivité complexe fonction de la fréquence. Ordinairement, pour  $\omega \neq \omega_0$ , la partie imaginaire est négligeable; elle joue cependant un rôle très important lorsque  $\omega$  est proche de l'une des fréquences caractéristiques du milieu. A la limite  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\epsilon(\omega)$  tend vers une constante réelle qui coïncide avec la constante diélectrique statique

$$\epsilon(\omega) \rightarrow \epsilon_s = \epsilon_0 \left[ 1 + \frac{N e^2}{\omega_0^2 m \epsilon_0} \right]. \quad (10.7.166)$$

Dans un milieu dispersif, l'équation des ondes monochromatiques s'écrit

$$\Delta \bar{E}(\bar{x}, t) = -\omega^2 \epsilon(\omega) \mu \bar{E}(\bar{x}, t) \quad (10.7.167)$$

Elle admet encore des solutions de type ondes planes, par exemple,

$$\bar{E}(z, t) = \bar{E}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)} \quad (10.7.168)$$

si le nombre d'ondes satisfait la relation

$$\tilde{k} = \omega \sqrt{\epsilon \mu}. \quad (10.7.169)$$

Si  $\epsilon$  est complexe, il en est de même de  $\tilde{k}$ , donc avec

$$\tilde{k} = k + i \kappa \quad (10.7.170)$$

la solution de l'équation

$$\bar{E}(z, t) = \bar{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \quad (10.7.171)$$

représente une onde amortie. Noter qu'il n'est pas question ici de conductivité:  $k$  et  $\kappa$  sont définis par les paramètres des oscillateurs amortis, c'est-à-dire, par les paramètres caractéristiques de la structure atomique du milieu. Puisque l'intensité de l'onde se comporte comme  $e^{-2\kappa z}$ , la quantité

$$d = 2 \kappa \quad (10.7.172)$$

est appelée coefficient d'absorption.

### 10.7.2 Conductivité $\sigma(\omega)$

Dans un très bon conducteur (métal), l'effet du champ se manifeste surtout sur les électrons libres ( $\omega_0 = 0$ ) par l'apparition d'un courant de conduction:

$$\bar{j}_\omega = N e \frac{d}{dt} \bar{x}(t) = \frac{i\omega}{\omega^2 + i\beta\omega} \frac{N e^2}{m} \bar{E}. \quad (10.7.173)$$

Avec  $\bar{j}_\omega = \sigma(\omega) \bar{E}$ , on obtient donc une conductivité complexe fonction de la fréquence

$$\sigma(\omega) = \frac{1}{\beta - i\omega} \frac{N e^2}{m}. \quad (10.7.174)$$

Pour  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\sigma(\omega)$  tend vers une constante réelle qui est la conductivité statique du modèle de Drude

$$\sigma(\omega) \rightarrow \sigma_s = \frac{1}{\beta} \frac{N e^2}{m}. \quad (10.7.175)$$

### 10.7.3 Milieu diélectrique et conducteur

Dans le cas général (faibles conducteurs, semi-conducteurs, plasmas,...) la matière manifeste à la fois des propriétés diélectriques et conductrices. On peut les traiter ensemble en définissant une permittivité généralisée  $\hat{\epsilon}(\omega)$ :

$$\hat{\epsilon}_r(\omega) = \frac{\hat{\epsilon}(\omega)}{\epsilon_0} = 1 + \hat{\chi}(\omega) = 1 + \chi(\omega) + i \frac{\sigma(\omega)}{\omega \epsilon_0} \quad (10.7.176)$$

ou

$$\hat{\epsilon}(\omega) = \epsilon(\omega) + i \frac{\sigma(\omega)}{\omega}. \quad (10.7.177)$$

Dans le modèle grossier considéré, cela revient à supposer qu'il y a une fraction  $\alpha$  d'électrons liés et une fraction  $(1 - \alpha)$  d'électrons libres de sorte que

$$\hat{\epsilon}_r(\omega) = 1 + \frac{N e^2}{m \epsilon_0} \left[ \frac{\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\beta\omega} - \frac{(1 - \alpha)}{\omega(\omega + i\beta)} \right]. \quad (10.7.178)$$

Pour  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\hat{\epsilon}(\omega) \rightarrow \infty$  car le deuxième terme a un pôle d'ordre un en  $\omega = 0$ . On identifie les constantes statiques comme les deux premiers coefficients du développement de Taylor au voisinage de  $\omega = 0$  de la fonction  $\omega \hat{\epsilon}(\omega)$ , c'est-à-dire,

$$\omega \hat{\epsilon}(\omega) = i \frac{\sigma_s}{\epsilon_0} + \omega \epsilon_s + \dots \quad (10.7.179)$$

On peut aussi noter que pour  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $\hat{\epsilon}_r(\omega)$  se comporte asymptotiquement comme

$$\hat{\epsilon}_r(\omega) \rightarrow 1 - \frac{N e^2}{m \epsilon_0} \frac{1}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (10.7.180)$$

qui ne contient plus ni  $\omega_0$ , ni  $\beta$  caractéristiques de la structure atomique. Seules apparaissent la masse et la charge de l'électron à travers la "fréquence plasma" ou fréquence de Langmuir

$$\omega_p = \sqrt{\frac{N e^2}{m \epsilon_0}}. \quad (10.7.181)$$

À très haute fréquence, il n'y a donc plus ni polarisation, ni conduction. On attribue cet effet à l'inertie des électrons: à cause de leur masse finie, ils ne peuvent plus répondre à des sollicitations de fréquence trop élevée et ont donc tendance à rester en place.

#### 10.7.4 Causalité dans la relation entre $\bar{D}$ et $\bar{E}$

La dépendance en  $\omega$  de la permittivité électrique a comme conséquence que la relation entre  $\bar{D}(\bar{x},t)$  et  $\bar{E}(\bar{x},t)$  n'est plus locale en le temps. En effet, si les composantes monochromatiques des deux champs sont liées par

$$\bar{D}(\bar{x},\omega) = \hat{\epsilon}(\omega) \bar{E}(\bar{x},\omega) \quad (10.7.182)$$

la dépendance en le temps peut être reconstruite par superposition de Fourier. A  $\bar{x}$  constant, on a

$$\bar{D}(\bar{x},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \bar{D}(\bar{x},\omega) \quad (10.7.183)$$

et

$$\bar{D}(\bar{x},\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega t'} \bar{D}(\bar{x},t') \quad (10.7.184)$$

et les relations correspondantes entre  $\bar{E}(\bar{x},t)$  et  $\bar{E}(\bar{x},\omega)$ . En injectant (10.7.182) dans (10.7.184), on a

$$\bar{D}(\bar{x},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \hat{\epsilon}(\omega) \bar{E}(\bar{x},\omega). \quad (10.7.185)$$

Le membre de droite est la transformée de Fourier d'un produit de fonctions: elle est égale au produit de convolution des transformées de Fourier de chacun des facteurs. En effet, ceci s'écrit aussi

$$\bar{D}(\bar{x},t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \hat{\epsilon}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega t'} \bar{E}(\bar{x},t') \quad (10.7.186)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \bar{E}(\bar{x},t') \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \hat{\epsilon}(\omega) e^{i\omega t'} \quad (10.7.187)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \bar{E}(\bar{x},t') \hat{\epsilon}(t-t') \quad (10.7.188)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \bar{E}(\bar{x},t-\tau) \hat{\epsilon}(\tau) \quad (10.7.189)$$

avec la notation

$$\hat{\epsilon}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega\tau} \hat{\epsilon}(\omega). \quad (10.7.190)$$

La relation (10.7.189) entre  $\bar{D}$  et  $\bar{E}$  est toujours linéaire, mais, dans la valeur de  $\bar{D}$ , à un instant, dépend des valeurs de  $\bar{E}$  à tous les instants. La causalité exige que seules les valeurs de  $\bar{E}$  pour des temps  $t' < t$  contribuent à  $\bar{D}$  en  $t$ . La fonction  $\hat{\epsilon}(\tau)$  doit donc être nulle pour tous les  $\tau < 0$ ; elle doit être de la forme

$$\hat{\epsilon}(\tau) = \Theta(\tau) \hat{\epsilon}'(\tau), \quad (10.7.191)$$

où

$$\Theta(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau > 0 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases} \quad (10.7.192)$$

est la fonction de HEAVISIDE. Dans ces conditions, (10.7.189) devient

$$\bar{D}(\bar{x},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} d\tau \hat{\epsilon}'(\tau) \bar{E}(\bar{x},t-\tau). \quad (10.7.193)$$

# Chapitre 11

## Guides d'ondes

Le guidage des ondes électromagnétiques est précieux dans la transmission des signaux électriques. Selon le domaine des fréquences considéré, différents systèmes de transmission sont utilisés: i) à basse fréquence ( $< 1MHz$ ), des fils conducteurs massifs, ii) à haute fréquence ( $< 1GHz$ ), des câbles coaxiaux, iii) en ondes millimétriques et centimétriques ( $< 1THz$ ), des guides d'ondes creux à section rectangulaire. A plus hautes fréquences encore, en infra-rouge et dans le visible ( $< 10^{15}Hz$ ), les industries des télécommunications exploitent les propriétés des fibres optiques diélectriques. L'étude de la propagation des ondes passe par la résolution des équations de Maxwell en présence de surfaces métalliques conductrices.

### 11.1 Champs à la surface et à l'intérieur d'un conducteur: effet de peau.

Soit  $S$ , de normale extérieure  $\bar{n}$ , la surface limitant un conducteur parfait placé dans un milieu non conducteur. Comme dans le cas statique, le champ électrique dans le conducteur est nul; les charges libres sont si mobiles qu'en réponse à une modification des champs, elles se mettent en mouvement quasi instantanément et produisent sur la surface la distribution de charges de densité  $\sigma_f$  nécessaire pour annuler le champ électrique à l'intérieur du conducteur parfait

$$\bar{n} \cdot \bar{D} = \sigma_f \quad (11.1.1)$$

De la même façon, pour un champ magnétique variable, les charges de surface se mettent en mouvement sous l'effet du champ magnétique tangentiel et produisent une densité superficielle de courants  $\bar{k}_f$

$$\bar{n} \times \bar{H} = \bar{k}_f \quad (11.1.2)$$

telle que le champ magnétique s'annule à l'intérieur du conducteur parfait. Les autres conditions aux limites sont

$$\bar{n} \cdot [\bar{B} - \bar{B}_c] = 0 \quad (11.1.3)$$

$$\bar{n} \times [\bar{E} - \bar{E}_c] = 0. \quad (11.1.4)$$

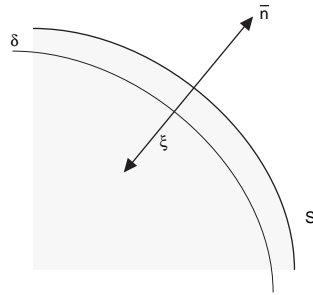


L'indice  $c$  se réfère au conducteur. A l'extérieur, près de la surface d'un conducteur *parfait*, seules les composantes normale de  $\vec{E}$  et tangentielle de  $\vec{H}$  sont  $\neq 0$  et ces champs s'annulent de façon brutale dans le conducteur. Dans les bons conducteurs, qui ne sont cependant pas parfaits, la situation est très semblable, mais les champs à l'intérieur du conducteur, au lieu de s'annuler brutalement, décroissent de façon exponentielle dans une petite région de profondeur  $\delta$ , appelée *profondeur de peau*, sous la surface. Pour de bons conducteurs et pour des fréquences modérées,  $\delta$  est de l'ordre de quelques millimètres. Les conditions aux limites (11.1.1) et (11.1.2) ne sont donc valables qu'en dehors de la mince couche d'épaisseur  $\delta$  sous la surface.

Si on s'intéresse à ce qui se passe dans cette couche, une certaine prudence est de mise. D'abord la loi d'Ohm,  $\vec{j}_f = \sigma \vec{E}_c$ , indique que lorsque la conductivité  $\sigma$  est finie, il ne peut pas y avoir de courants en surface. La condition (11.1.2) doit donc être remplacée par

$$\vec{n} \times [\vec{H} - \vec{H}_c] = 0. \quad (11.1.5)$$

Les changements qui se manifestent dans le cas d'un conducteur de conductivité  $\sigma$  finie, par rapport à un conducteur de conductivité infinie, seront analysés par approximations successives. Supposons d'abord que tout juste au dessus de la surface du conducteur il n'y ait qu'un champ électrique normal,  $\vec{E}_\perp$  et un champ magnétique tangentiel  $\vec{H}_\parallel$ , comme pour un conducteur parfait. (11.1.5) implique alors que le même champ  $\vec{H}_\parallel$  existe dans le conducteur, de l'autre côté de la surface.



La suite de cette analyse sera simplifiée par l'introduction de quelques approximations:

a) on négligera le courant de déplacement à l'intérieur du conducteur et on supposera que les champs dépendent de  $t$  par  $e^{-i\omega t}$ ; les équations de Maxwell qui les relient prennent alors la forme

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_c = \sigma \vec{E}_c \quad (11.1.6)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_c = i\omega \mu_c \vec{H}_c. \quad (11.1.7)$$

b) on négligera, dans les équations, les dérivées tangentielles des champs par rapport à leurs dérivées normales (dont le comportement est le plus abrupt); en désignant par  $\xi$  la coordonnée normale entrant dans le conducteur, on peut remplacer dans (11.1.6), (11.1.7)

$$\vec{\nabla} \quad \text{par} \quad -\vec{n} \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (11.1.8)$$

A cette approximation, les équations (11.1.6), (11.1.7) deviennent

$$-\bar{n} \times \frac{\partial \bar{H}_c}{\partial \xi} \simeq \sigma \bar{E}_c \quad (11.1.9)$$

$$-\bar{n} \times \frac{\partial \bar{E}_c}{\partial \xi} \simeq i\omega \mu_c \bar{H}_c. \quad (11.1.10)$$

Avec

$$\bar{n} \times \left( -\bar{n} \times \frac{\partial \bar{E}_c}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial \bar{E}_c}{\partial \xi} = i\omega \mu_c (\bar{n} \times \bar{H}_c), \quad (11.1.11)$$

elles se combinent en

$$\bar{n} \cdot \bar{H}_c \simeq 0 \quad (11.1.12)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\bar{n} \times \bar{H}_c) + \frac{2i}{\delta^2} (\bar{n} \times \bar{H}_c) \simeq 0, \quad (11.1.13)$$

où

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_c \omega \sigma}} \quad (11.1.14)$$

est la profondeur de peau. Dans le conducteur,  $\bar{H}_c$  est donc parallèle à la surface, conformément aux conditions limites. La dernière équation admet comme solution

$$\bar{H}_c = \bar{H}_{\parallel} e^{-\frac{\xi}{\delta}} e^{i\frac{\xi}{\delta}} \quad (11.1.15)$$

où  $\bar{H}_{\parallel}$  est le champ tangentiel au dessus de la surface. Par (11.1.11), on obtient donc une composante tangentielle du champ électrique dans le conducteur

$$\bar{E}_c \simeq \frac{(1-i)}{\sigma \delta} (\bar{n} \times \bar{H}_{\parallel}) e^{-\frac{\xi}{\delta}} e^{i\frac{\xi}{\delta}} \quad (11.1.16)$$

Les champs à l'intérieur du conducteur affichent donc les caractéristiques annoncées: i) il décroissent de façon exponentielle, ii) ils sont déphasés par rapport aux champs à l'extérieur, iii) le champ magnétique y est beaucoup plus grand que le champ électrique. Pour un bon conducteur, les champs à l'intérieur sont parallèles à la surface et se propagent perpendiculairement à cette surface; leur grandeur ne dépend que de  $\bar{H}_{\parallel}$  juste au dessus de la surface.

La condition limite (11.1.4) indique alors que tout juste au dessus de la surface, le champ électrique doit avoir une petite composante tangentielle donnée par (11.1.16) évalué en  $\xi = 0$ : soit

$$\bar{E}_{\parallel} = \frac{(1-i)}{\sigma \delta} (\bar{n} \times \bar{H}_{\parallel}). \quad (11.1.17)$$

A cette approximation, il existe aussi une petite composante normale de  $\bar{B}$  tout juste au dessus de la surface; elle se déduit du champ électrique (11.1.17) par la loi d'induction de Faraday et elle est du même ordre de grandeur que  $\bar{E}_{\parallel}$ . Ces composantes nouvelles s'ajoutent à  $\bar{E}_{\perp}$  et à  $\bar{H}_{\parallel}$  et sont responsables de l'existence d'un courant d'énergie  $\bar{S}$  à l'intérieur du conducteur.

Par la loi d'Ohm, il existe une densité de courant, sous la surface du conducteur

$$\bar{j} = \sigma \bar{E}_c = \frac{(1-i)}{\delta} (\bar{n} \times \bar{H}_{\parallel}) e^{-\frac{\xi}{\delta}} e^{i\frac{\xi}{\delta}} \quad (11.1.18)$$

Ce courant est confiné dans la couche d'épaisseur  $\delta$ ; il équivaut à une distribution surfacique effective de courant

$$\bar{k}_{eff} = \int_0^\infty d\xi \bar{j} = \bar{n} \times \bar{H}_\parallel. \quad (11.1.19)$$

## 11.2 Guides d'ondes

Nous traiterons ici de la propagation des ondes électro-magnétiques dans des cylindres creux à parois métalliques. Si le cylindre est limité, c'est une cavité, s'il est infini, c'est un guide d'ondes. C'est à ce dernier cas que nous allons principalement nous intéresser. Dans la discussion qui suit, nous supposerons que les parois sont des conducteurs parfaits de conductivité infinie. Pour des raisons de simplicité, nous admettrons aussi que le cylindre a la même section en tous les points de son axe.

Si les champs dépendent du temps en  $e^{-i\omega t}$ , les équations de Maxwell, à l'intérieur du cylindre, rempli d'un matériau uniforme, linéaire, non dissipatif de permittivité  $\epsilon$  et de perméabilité  $\mu$ , prennent la forme

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = 0 \quad \bar{\nabla} \times \bar{E} = i\omega \bar{B} \quad (11.2.20)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0 \quad \bar{\nabla} \times \bar{B} = -i\omega\epsilon\mu \bar{E}. \quad (11.2.21)$$

On choisit de placer l'axe Oz des coordonnées sur l'axe du cylindre. Les équations de Maxwell s'explicitent en

$$\partial_x E_x + \partial_y E_y = -\partial_z E_z \quad , \quad \partial_x B_x + \partial_y B_y = -\partial_z B_z \quad (11.2.22)$$

$$\partial_x E_y - \partial_y E_x = i\omega B_z \quad , \quad \partial_x B_y - \partial_y B_x = -i\omega\epsilon\mu E_z \quad (11.2.23)$$

$$\partial_y E_z - \partial_z E_y = i\omega B_x \quad , \quad \partial_y B_z - \partial_z B_y = -i\omega\epsilon\mu E_x \quad (11.2.24)$$

$$\partial_z E_x - \partial_x E_z = i\omega B_y \quad , \quad \partial_z B_x - \partial_x B_z = -i\omega\epsilon\mu E_y. \quad (11.2.25)$$

Il peut être utile de les récrire en termes des composantes longitudinales (suivant l'axe du guide) et transverses (orthogonales à l'axe) des champs: avec

$$\bar{E} = \bar{E}_t + \bar{1}_z E_z, \quad \bar{B} = \bar{B}_t + \bar{1}_z B_z, \quad \bar{\nabla} = \bar{\nabla}_t + \bar{1}_z \partial_z \quad (11.2.26)$$

elles se combinent en

$$\frac{\partial \bar{E}_t}{\partial z} + i\omega (\bar{1}_z \times \bar{B}_t) = \bar{\nabla}_t E_z, \quad \bar{1}_z \cdot (\bar{\nabla}_t \times \bar{E}_t) = i\omega B_z \quad (11.2.27)$$

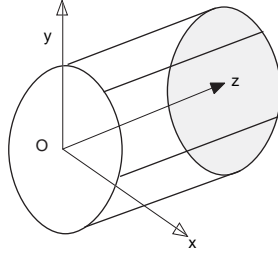
$$\frac{\partial \bar{B}_t}{\partial z} - i\epsilon\mu\omega (\bar{1}_z \times \bar{E}_t) = \bar{\nabla}_t B_z, \quad \bar{1}_z \cdot (\bar{\nabla}_t \times \bar{B}_t) = -i\omega\epsilon\mu E_z \quad (11.2.28)$$

$$\bar{\nabla}_t \cdot \bar{E}_t = -\frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad \bar{\nabla}_t \cdot \bar{B}_t = -\frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (11.2.29)$$

Ces équations se séparent en équations du second ordre

$$(\Delta + \omega^2 \epsilon\mu) \bar{E}(x,y,z,t) = 0 \quad (11.2.30)$$

$$(\Delta + \omega^2 \epsilon\mu) \bar{B}(x,y,z,t) = 0. \quad (11.2.31)$$



On peut en rechercher des solutions qui décrivent des ondes progressives dans la direction de l'axe du guide de la forme

$$\bar{E}(x,y,z,t) = \bar{E}(x,y) e^{ikz-i\omega t} \quad (11.2.32)$$

$$\bar{B}(x,y,z,t) = \bar{B}(x,y) e^{ikz-i\omega t} \quad (11.2.33)$$

où  $k$  est le nombre d'ondes qui peut, a priori, être réel ou complexe. Pour des solutions du type (11.2.32),(11.2.33), les équations du second ordre se transforment en

$$(\Delta^{(2)} + \omega^2 \epsilon \mu - k^2) \bar{E}(x,y) = 0 \quad (11.2.34)$$

$$(\Delta^{(2)} + \omega^2 \epsilon \mu - k^2) \bar{B}(x,y) = 0 \quad (11.2.35)$$

où  $\Delta^{(2)}$  désigne le laplacien sur une section  $z = \text{constante}$ ,  $\Delta^{(2)}$  est aussi appelé "laplacien transverse",

$$\Delta^{(2)} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (11.2.36)$$

En injectant (11.2.32), (11.2.33) dans les équations de Maxwell, et en utilisant

$$\partial_z e^{ikz} = ik e^{ikz} \quad (11.2.37)$$

on explicite le système d'équations en

$$\partial_x E_x + \partial_y E_y = -ikE_z \quad , \quad \partial_x B_x + \partial_y B_y = -ikB_z \quad (11.2.38)$$

$$\partial_x E_y - \partial_y E_x = i\omega B_z \quad , \quad \partial_x B_y - \partial_y B_x = -i\omega \epsilon \mu E_z \quad (11.2.39)$$

$$\partial_y E_z - ikE_y = i\omega B_x \quad , \quad \partial_y B_z - ikB_y = -i\omega \epsilon \mu E_x \quad (11.2.40)$$

$$ikE_x - \partial_x E_z = i\omega B_y \quad , \quad ikB_x - \partial_x B_z = -i\omega \epsilon \mu E_y. \quad (11.2.41)$$

(11.2.40) et (11.2.41) sont équivalentes à

$$i(k^2 - \omega^2 \epsilon \mu) E_x = k \partial_x E_z + \omega \partial_y B_z \quad (11.2.42)$$

$$i(k^2 - \omega^2 \epsilon \mu) E_y = k \partial_y E_z - \omega \partial_x B_z \quad (11.2.43)$$

$$i(k^2 - \omega^2 \epsilon \mu) B_x = k \partial_x B_z - \omega \epsilon \mu \partial_y E_z \quad (11.2.44)$$

$$i(k^2 - \omega^2 \epsilon \mu) B_y = k \partial_y B_z + \omega \epsilon \mu \partial_x E_z \quad (11.2.45)$$

Ces équations indiquent que, pour

$$k^2 \neq \omega^2 \epsilon \mu, \quad (11.2.46)$$

ce que nous admettrons pour le moment, les composantes transverses des champs électrique et magnétique se déduisent des deux fonctions  $E_z(x,y)$  et  $B_z(x,y)$ , solutions de

$$(\Delta^{(2)} + \omega^2 \epsilon \mu - k^2) E_z(x,y) = 0 \quad (11.2.47)$$

$$(\Delta^{(2)} + \omega^2 \epsilon \mu - k^2) B_z(x,y) = 0 \quad (11.2.48)$$

et satisfaisant des conditions aux limites appropriées.

### 11.2.1 Conditions limites pour $E_z$ et $B_z$

Dans un conducteur parfait, et pour des champs qui dépendent du temps,  $\bar{E}(\bar{D})$  et  $\bar{B}(\bar{H})$  s'annulent dans le conducteur. La présence de charges et de courants à l'interface autorise l'existence, au bord, d'une composante normale de  $\bar{D}$  et d'une composante tangentielle de  $\bar{H}$ . Les composantes tangentielles de  $\bar{E}$  et la composante normale de  $\bar{B}$  doivent être continues au passage de la surface, donc

$$\bar{n} \times \bar{E} = 0 \quad \bar{n} \cdot \bar{B} = 0. \quad (11.2.49)$$

Pour  $E_z$ , qui est l'une des composantes tangentielles du champ électrique, la condition limite est donc simplement

$$E_z|_S = 0 \quad (11.2.50)$$

Tandis que, en vertu des équations (11.2.40) et (11.2.41), on doit imposer à  $B_z$  la condition limite suivante

$$\partial_n B_z|_S = 0. \quad (11.2.51)$$

En effet, en tout point de la surface,  $\bar{n} = n_x \bar{1}_x + n_y \bar{1}_y$ , on tire donc des équations (11.2.40) et (11.2.41)

$$ik(n_x B_x + n_y B_y) + i\epsilon\mu\omega(n_x E_y - n_y E_x) = (n_x \partial_x + n_y \partial_y) B_z \quad (11.2.52)$$

ou

$$ik \bar{n} \cdot \bar{B} + i\epsilon\mu\omega(\bar{n} \times \bar{E})_z = \partial_n B_z \quad (11.2.53)$$

Sur la surface, avec (11.2.49), ceci se réduit bien à  $0 = \partial_n B_z|_S$ .

### 11.2.2 Valeurs propres du Laplacien transverse

Les équations (11.2.47) et (11.2.48), complétées par les conditions aux limites (11.2.50) et (11.2.51) fournissent  $E_z(x,y)$  et  $B_z(x,y)$  comme fonctions propres du laplacien transverse, de valeurs propres

$$-\gamma^2 = k^2 - \omega^2 \epsilon \mu \quad (11.2.54)$$

Sur l'espace des fonctions qui satisfont les conditions limites (11.2.50), (11.2.51) l'opérateur linéaire  $\Delta^{(2)}$  est auto-adjoint; ses valeurs propres sont réelles,  $\leq 0$  et discrètes [ nous les noterons  $-\gamma_\lambda^2$ , où  $\lambda$  est un multi-indice discret] et ses fonctions propres forment un système complet orthonormalisable de fonctions sur la section du cylindre. Pour la valeur propre  $-\gamma_\lambda^2$ , le nombre d'ondes est fixé par (11.2.54) et vaut

$$k_\lambda^2 = \omega^2 \epsilon \mu - \gamma_\lambda^2. \quad (11.2.55)$$

Si on définit la *fréquence de coupure* comme la fréquence à laquelle  $k_\lambda$  s'annule

$$\omega_\lambda = \frac{\gamma_\lambda}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (11.2.56)$$

(11.2.55) se récrit comme

$$k_\lambda^2 = \epsilon\mu(\omega^2 - \omega_\lambda^2) \quad (11.2.57)$$

$k_\lambda$  est *réel* pour  $\omega > \omega_\lambda$  et *imaginaire pur* pour  $\omega < \omega_\lambda$ ; dans ce dernier cas,  $k_\lambda = i\kappa_\lambda$  et le champ se comporte comme  $e^{-\kappa_\lambda z}$ ; il est alors purement amorti.

Seules les fréquences  $\omega > \omega_\lambda$  peuvent se propager dans un guide d'ondes donné: le guide joue donc le rôle d'un *filtre passe haut*. Noter que lorsque  $k_\lambda$  est réel, il est toujours inférieur à la valeur qu'il aurait dans l'espace infini ( $k_\lambda < \omega \sqrt{\epsilon\mu} = \frac{\omega}{c}$ ); la longueur d'onde dans le guide,  $\lambda_\lambda = \frac{2\pi}{k_\lambda} > \frac{2\pi c'}{\omega}$ , est donc toujours plus grande que la longueur d'onde correspondante dans l'espace infini.

### 11.2.3 Ondes TEM

**L'onde transverse électrique et magnétique** est une solution particulière du système (11.2.38) à (11.2.41) qui se caractérise par les propriétés

$$E_z = B_z = 0. \quad (11.2.58)$$

Pour de telles solutions, les équations (11.2.38) à (11.2.41) se simplifient en

$$\partial_x E_x + \partial_y E_y = 0 \quad , \quad \partial_x B_x + \partial_y B_y = 0 \quad (11.2.59)$$

$$\partial_x E_y - \partial_y E_x = 0 \quad , \quad \partial_x B_y - \partial_y B_x = 0 \quad (11.2.60)$$

$$-ik E_y = i\omega B_x \quad , \quad ik B_y = i\omega\epsilon\mu E_x \quad (11.2.61)$$

$$ik E_x = i\omega B_y \quad , \quad ik B_x = -i\omega\epsilon\mu E_y, \quad (11.2.62)$$

Les 4 dernières équations sont des équations linéaires et homogènes pour les composantes transverses des champs

$$\begin{pmatrix} k & \omega \\ \omega\epsilon\mu & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ B_x \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} k & -\omega \\ -\omega\epsilon\mu & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ B_y \end{pmatrix} = 0 \quad (11.2.63)$$

Elles n'admettent de solutions non triviales qu'à la condition que

$$k^2 = \epsilon\mu\omega^2 \quad (11.2.64)$$

comme dans un milieu infini. On en tire aussi  $\bar{B}$  en fonction de  $\bar{E}$ :

$$\bar{B}^{TEM} = \sqrt{\epsilon\mu}(\bar{1}_z \times \bar{E}^{TEM}). \quad (11.2.65)$$

Cette relation est aussi la même que celle que satisfont les ondes planes dans un milieu illimité. Enfin les équations pour les composantes transverses du champ  $\bar{E}^{TEM}$  sont équivalentes aux équations de l'électrostatique, sans sources, à deux dimensions

$$\nabla^{(2)} \cdot \bar{E} = 0, \quad \nabla^{(2)} \times \bar{E} = 0. \quad (11.2.66)$$

Noter que ces solutions *TEM* sont triviales si la section est *simplement connexe*. En effet, en introduisant le potentiel électrostatique par  $\bar{E} = -\nabla\phi$ , celui-ci doit être solution de l'équation de Laplace à deux dimensions, sur une section du cylindre et il doit être constant sur le bord qui est une équipotentielle: il est donc constant partout. Il en résulte que  $\bar{E}^{TEM} = 0 = \bar{B}^{TEM}$  à l'intérieur du cylindre. Pour permettre l'existence et la propagation d'ondes TEM, il faut donc au moins un câble coaxial.

### 11.2.4 Propagation d'ondes TE, TM dans un Guide

Les autres solutions particulières que nous considérerons ici se répartissent en deux catégories:

1) les *ondes transverses électriques* (TE) pour lesquelles

$$E_z = 0 \quad \text{partout et} \quad \frac{\partial B_z}{\partial n}|_S = 0. \quad (11.2.67)$$

2) les *ondes transverses magnétiques* (TM) telles que

$$B_z = 0 \quad \text{partout et} \quad E_z|_S = 0, \quad (11.2.68)$$

#### Ondes TE

Pour les solutions de type *TE*, avec  $E_z = 0$  partout et  $\partial_n B_z|_S = 0$ , toutes les composantes transverses du champ électrique et du champ magnétique se déduisent de  $B_z$  solution de l'équation

$$[\Delta^{(2)} + \omega^2 \epsilon \mu - k^2] B_z(x, y) = 0 \quad (11.2.69)$$

avec la condition limite par

$$B_x = -\frac{ik}{k^2 - \omega^2 \epsilon \mu} \partial_x B_z \quad (11.2.70)$$

$$B_y = -\frac{ik}{k^2 - \omega^2 \epsilon \mu} \partial_y B_z \quad (11.2.71)$$

$$E_x = -\frac{i\omega}{k^2 - \omega^2 \epsilon \mu} \partial_y B_z \quad (11.2.72)$$

$$E_y = \frac{i\omega}{k^2 - \omega^2 \epsilon \mu} \partial_x B_z. \quad (11.2.73)$$

pour  $k = k_\lambda$ . Le champ électrique transverse est orthogonal au champ magnétique transverse et

$$\bar{B}_t = \frac{k}{\omega} (\bar{1}_z \times \bar{E}_t) = -\frac{ik}{k^2 - \omega^2 \epsilon \mu} \bar{\nabla}_t B_z. \quad (11.2.74)$$

Remarque: pour  $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$ , il faut retourner aux équations (11.2.42) à (11.2.45), dont les solutions *TE* deviennent des solutions *TEM* car

$$\partial_x B_z = 0 = \partial_y B_z \longrightarrow B_z = \text{constante}. \quad (11.2.75)$$

#### Ondes TM

Pour les solutions de type *TM*, avec  $B_z = 0$  partout et  $E_z|_S = 0$ , toutes les composantes transverses du champ électrique et du champ magnétique se déduisent de  $E_z$  solution de

$$[\Delta^{(2)} + \omega^2 \epsilon \mu - k^2] E_z(x, y) = 0 \quad (11.2.76)$$

avec la condition limite par

$$B_x = \frac{i\omega\epsilon\mu}{k^2 - \omega^2\epsilon\mu} \partial_y E_z \quad (11.2.77)$$

$$B_y = -\frac{i\omega\epsilon\mu}{k^2 - \omega^2\epsilon\mu} \partial_x E_z \quad (11.2.78)$$

$$E_x = -\frac{ik}{k^2 - \omega^2\epsilon\mu} \partial_x E_z \quad (11.2.79)$$

$$E_y = -\frac{ik}{k^2 - \omega^2\epsilon\mu} \partial_y E_z \quad (11.2.80)$$

pour  $k = k_\lambda$ . Le champ électrique transverse est orthogonal au champ magnétique transverse et

$$\bar{E}_t = -\frac{ik}{k^2 - \omega^2\epsilon\mu} \bar{\nabla}_t E_z \quad (11.2.81)$$

et

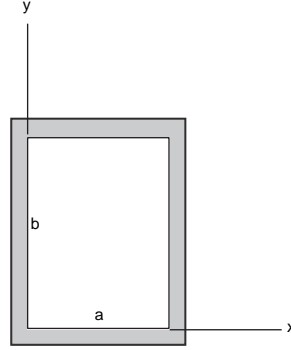
$$\bar{B}_t = \frac{\omega\epsilon\mu}{k} (\bar{1}_z \times \bar{E}_t). \quad (11.2.82)$$

Remarque: pour  $k^2 = \omega^2 \epsilon\mu$ , il faut remonter aux équations (11.2.42) à (11.2.45), dont les solutions *TM* deviennent des solutions *TEM* car

$$\partial_x E_z = 0 = \partial_y E_z \longrightarrow E_z = 0. \quad (11.2.83)$$

Conclusion: pour une fréquence  $\omega$  donnée, seuls certains modes *TE* $_\lambda$ , *TM* $_\lambda$  peuvent se propager. En pratique, on peut choisir les dimensions de la section pour qu'à la fréquence  $\omega$  à laquelle on opère, un seul mode puisse se propager dans le guide d'ondes.

### 11.3 Exemple: GO de section rectangulaire



Pour un guide d'ondes de section rectangulaire limité par  $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ , les solutions *TE* de l'équation (11.2.69) qui satisfont la condition limite  $\partial_n B_z|_S = 0$  se calculent par la méthode de séparation des variables et sont données par

$$B_z(x,y) = B_{nm} \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}, \quad n,m = 0,1,2,3,\dots \quad (11.3.84)$$

On peut choisir l'amplitude  $B_{nm}$  réelle. Les valeurs propres sont

$$\gamma_{nm}^2 = \pi^2 \left[ \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right] \quad (11.3.85)$$



La fréquence de coupure du mode  $(n,m)$  est donnée par

$$\omega_{nm} = \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} \quad (11.3.86)$$

et

$$k_{nm} = \frac{1}{c'} \sqrt{\omega^2 - \omega_{nm}^2} \quad (11.3.87)$$

est la relation de dispersion pour le mode  $TE_{nm}$ .

Pour  $n = m = 0$ , on retrouve une solution de type  $TEM$ :  $B_z(x,y)$  se réduit à une constante; il en résulte que

$$E_x = E_y = B_x = B_y = 0. \quad (11.3.88)$$

Cet exemple confirme qu'il n'y a pas d'onde  $TEM$  dans un guide d'ondes de section simplement connexe.

Le mode  $TE_{nm}$  principal (pour  $a < b$ ), c'est-à-dire, celui dont la fréquence de coupure est la plus petite, est le mode  $TE_{01}$  pour lequel le champ complexe  $B_z$  vaut

$$B_z(x,y,z,t) = B_{01} \cos \frac{\pi y}{b} e^{i(k_{01}z - \omega t)} \quad (11.3.89)$$

On en déduit

$$E_x(x,y,z,t) = \frac{i\omega}{k_{01}^2 - \omega^2 \epsilon \mu} \frac{\pi}{b} B_{01} \sin \frac{\pi y}{b} e^{i(k_{01}z - \omega t)} \quad (11.3.90)$$

$$E_y(x,y,z,t) = 0 \quad (11.3.91)$$

$$E_z(x,y,z,t) = 0 \quad (11.3.92)$$

$$B_x(x,y,z,t) = 0 \quad (11.3.93)$$

$$B_y(x,y,z,t) = \frac{i k_{01}}{k_{01}^2 - \omega^2 \epsilon \mu} \frac{\pi}{b} B_{01} \sin \frac{\pi y}{b} e^{i(k_{01}z - \omega t)} \quad (11.3.94)$$

La présence du facteur "i" dans (11.3.90) et dans (11.3.94) indique qu'il y a un déphasage spatial (ou temporel) de 90 degrés entre  $B_z$  et  $E_x$  (et  $B_y$ ) dans la direction de propagation. Le champ électrique, par exemple, peut se voir comme superposition de deux ondes planes de l'espace illimité

$$\bar{E}(x,y,z,t) = \frac{E_{01}}{2} \{ e^{i(\frac{\pi}{b}y + k_{01}z - \omega t)} - e^{i(-\frac{\pi}{b}y + k_{01}z - \omega t)} \} \bar{1}_x \quad (11.3.95)$$

de vecteurs d'ondes respectifs

$$\bar{k}_+ = \frac{\pi}{b} \bar{1}_y + k_{01} \bar{1}_z \quad (11.3.96)$$

$$\bar{k}_- = -\frac{\pi}{b} \bar{1}_y + k_{01} \bar{1}_z. \quad (11.3.97)$$

Ces vecteurs ont la même norme; ils forment avec l'axe du cylindre des angles opposés  $\theta_+$  et  $\theta_- = -\theta_+$  dont la tangente est égale à

$$\tan \theta_+ = \frac{\pi}{b} \frac{1}{k_{01}} = \frac{\omega_{01}}{c' k_{01}} \quad (11.3.98)$$

Les deux ondes correspondent à des ondes incidente et réfléchie sur les parois  $y = 0$  et  $y = b$ . Pour  $\theta \simeq 0$ , elles se propagent pratiquement suivant l'axe Oz; pour  $\theta \simeq \frac{\pi}{2}$ , elles se propagent transversalement et dans ce cas limite, il n'y a plus de propagation selon l'axe du guide.

Les champs physiques réels sont donnés par

$$B_z(x,y,z,t) = B_{01} \cos \frac{\pi y}{b} \cos(k_{01}z - \omega t) \quad (11.3.99)$$

$$B_x(x,y,z,t) = 0 \quad (11.3.100)$$

$$B_y(x,y,z,t) = \sqrt{1 - \frac{\omega_{01}^2}{\omega^2}} \frac{\omega}{\omega_{01}} B_{01} \sin \frac{\pi y}{b} \sin(k_{01}z - \omega t) \quad (11.3.101)$$

$$E_x(x,y,z,t) = \frac{\omega c'}{\omega_{01}} B_{01} \sin \frac{\pi y}{b} \sin(k_{01}z - \omega t) \quad (11.3.102)$$

$$E_y(x,y,z,t) = 0 \quad (11.3.103)$$

$$E_z(x,y,z,t) = 0 \quad (11.3.104)$$

La fréquence de coupure du mode principal est

$$\omega_{01} = \frac{\pi c'}{b}, \quad (11.3.105)$$

il lui correspond dans l'espace infini la longueur d'onde

$$\lambda = \frac{2\pi c'}{\omega_{01}} = 2b. \quad (11.3.106)$$

### 11.3.1 Propagation de l'énergie

Le vecteur de Poynting est donné par

$$\bar{S}(x,y,z,t) = \frac{1}{\mu} \bar{E} \times \bar{B}; \quad (11.3.107)$$

en moyenne sur une période, il vaut

$$\langle \bar{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \langle \bar{S}(x,y,z,t) \rangle = \frac{c'}{2\mu} B_{01}^2 \frac{\omega^2}{\omega_{01}^2} \sqrt{1 - \frac{\omega_{01}^2}{\omega^2}} \sin^2 \frac{\pi y}{b} \bar{1}_z. \quad (11.3.108)$$

Le courant moyen d'énergie est donc dans la direction de propagation, comme pour une onde plane. L'énergie moyenne qui traverse une section du guide, par unité de temps, est égale à

$$\mathcal{P} = \int_0^a dx \int_0^b dy \langle \bar{S} \cdot \bar{1}_z \rangle = \frac{ab}{2} \frac{c'}{2\mu} B_{01}^2 \frac{\omega^2}{\omega_{01}^2} \sqrt{1 - \frac{\omega_{01}^2}{\omega^2}}. \quad (11.3.109)$$

La densité moyenne d'énergie du mode  $TE_{01}$  est égale à

$$\langle w \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt w \quad (11.3.110)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{1}{2} (\epsilon \bar{E}^2 + \frac{1}{\mu} \bar{B}^2). \quad (11.3.111)$$

L'énergie moyenne du champ par unité de longueur dans le guide est donnée par

$$U = \int_0^a dx \int_0^b dy \langle w \rangle = \frac{abB_{01}^2}{4\mu} \frac{\omega^2}{\omega_{01}^2}. \quad (11.3.112)$$

Le rapport

$$\frac{\mathcal{P}}{U} = c' \sqrt{1 - \frac{\omega_{01}^2}{\omega^2}} = v_g \quad (11.3.113)$$

fournit la vitesse moyenne de propagation de l'énergie dans le guide d'ondes, elle coïncide avec la *vitesse de groupe*

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_{01}} \quad (11.3.114)$$

pour  $\omega$  donné par (11.3.87):

$$\omega = \sqrt{k_{01}^2 c'^2 + \omega_{01}^2} \quad (11.3.115)$$

$v_g$  est toujours inférieure à la vitesse  $c'$  de la lumière et  $v_g \rightarrow 0$  lorsque  $\omega \rightarrow \omega_{01}$ . La vitesse de phase

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_{01}} = c' \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{01}^2}{\omega^2}}} \quad (11.3.116)$$

est supérieure à la vitesse de la lumière; le produit de la vitesse de phase par la vitesse de groupe est constant, il vaut

$$v_\varphi v_g = c'^2. \quad (11.3.117)$$

## 11.4 Cavité résonante

Si on ferme le guide par deux surfaces planes perpendiculaires à l'axe du cylindre, on obtient une cavité. Nous supposons comme précédemment que toutes les parois du guide sont de conductivité infinie et que la cavité est remplie d'un diélectrique sans pertes, de paramètres  $\epsilon$  et  $\mu$ . La réflexion des ondes sur les extrémités placées en  $z = 0$  et  $z = d$  impose aux champs une dépendance en la variable  $z$  qui est celle des ondes stationnaires, càd, de la forme

$$A \sin kz + B \cos kz. \quad (11.4.118)$$

Les conditions aux limites en  $z = 0$  et en  $z = d$  ne peuvent être satisfaites sur chacune de ces surfaces que si

$$k = p \frac{\pi}{d} = p \frac{2\pi}{\lambda}, \quad p = 0,1,2,3,\dots \quad (11.4.119)$$

Ainsi,

- pour une onde *TM*, demander que les composantes tangentielles du champ électrique s'annulent en  $z = 0$  et en  $z = d$  revient à imposer que  $E_x$  et  $E_y$  s'annulent sur ces plans, soit encore, puisque  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ , que  $\partial_z E_z$  s'annule en  $z = 0$  et  $z = d$ . On doit donc avoir

$$E_z(x,y,z) = \psi(x,y) \cos \frac{p\pi z}{d}, \quad p = 0,1,2,\dots \quad (11.4.120)$$

- pour une onde  $TE$ , il faut que la composante normale du champ magnétique s'annule en  $z = 0$  et en  $z = d$ , donc  $B_z$  doit s'annuler en  $z = 0$  et  $z = d$  et doit donc être de la forme

$$B_z(x,y,z) = \psi(x,y) \sin \frac{p\pi z}{d}, \quad p = 1,2,3,\dots \quad (11.4.121)$$

Les équations de Maxwell (11.2.27) à (11.2.29) fournissent les champs transverses: avec  $k = \frac{p\pi}{d}$ , ceux-ci sont donnés par

- dans le cas  $TM$

$$\bar{B}_t = \frac{-i\epsilon\mu\omega}{(k^2 - \omega^2\epsilon\mu)} (\bar{1}_z \times \bar{\nabla}_t E_z) = \frac{-i\epsilon\mu\omega}{(k^2 - \omega^2\epsilon\mu)} \cos \frac{p\pi z}{d} (\bar{1}_z \times \bar{\nabla}_t \psi) \quad (11.4.122)$$

$$\bar{E}_t = \frac{i}{\omega\epsilon\mu} (\bar{1}_z \times \frac{\partial \bar{B}_t}{\partial z}) = \frac{p\pi}{d(k^2 - \omega^2\epsilon\mu)} \sin \frac{p\pi z}{d} \bar{\nabla}_t \psi \quad (11.4.123)$$

- dans le cas  $TE$

$$\bar{E}_t = \frac{i\omega}{k^2 - \omega^2\epsilon\mu} \bar{1}_z \times \bar{\nabla}_t B_z = \frac{i\omega}{(k^2 - \omega^2\epsilon\mu)} \sin \frac{p\pi z}{d} (\bar{1}_z \times \bar{\nabla}_t \psi) \quad (11.4.124)$$

$$\bar{B}_t = -\frac{i}{\omega} \bar{1}_z \times \frac{\partial \bar{E}_t}{\partial z} = \frac{-p\pi}{d(k^2 - \omega^2\epsilon\mu)} \cos \frac{p\pi z}{d} \bar{\nabla}_t \psi \quad (11.4.125)$$

Dans chacun des cas  $TM$  ou  $TE$ , la fonction  $\psi(x,y)$  s'obtient en résolvant l'équation aux valeurs propres du laplacien transverse avec des conditions aux limites appropriées sur la surface latérale du cylindre. On ne trouve de solutions de

$$(\Delta^{(2)} - (\frac{p\pi}{d})^2 + \omega^2\epsilon\mu) \psi(x,y) = 0 \quad (11.4.126)$$

que pour des valeurs propres discrètes

$$-\gamma_\lambda^2 = (\frac{p\pi}{d})^2 - \omega^2\epsilon\mu \quad (11.4.127)$$

Pour chaque valeur de  $p$ , la valeur propre  $-\gamma_\lambda^2$  définit une fréquence propre  $\omega_{\lambda p}$  par

$$\omega_{\lambda p}^2 = \frac{1}{\epsilon\mu} [\gamma_\lambda^2 + (\frac{p\pi}{d})^2] \quad (11.4.128)$$

et permet de calculer les champs de ce mode résonant.

Pour une section rectangulaire, par exemple, on a trouvé comme valeurs propres les

$$\gamma_{nm}^2 = \pi^2 \left[ \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right] \quad (11.4.129)$$

les fréquences propres sont donc égales à

$$\omega_{nmp}^2 = \frac{\pi^2}{\epsilon\mu} \left[ \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2} \right] \quad (11.4.130)$$

# Chapitre 12

## Relativité Restreinte

### 12.1 Principe de relativité

Jusqu'à présent, nous avons écrit les équations de Maxwell et analysé leurs conséquences en repérant les champs et les sources dans l'espace et le temps par rapport à un système de coordonnées, soit  $(x, y, z)$  ou  $(x^1, x^2, x^3)$ , et par rapport à une horloge à laquelle est associé le paramètre d'évolution  $t$ . Un trièdre d'espace et une horloge caractérisent *un observateur*  $O$ . La question que nous allons aborder ici est de comparer les descriptions des lois fondamentales de la mécanique et de l'électromagnétisme faites par différents observateurs: ceux-ci décrivent les mêmes phénomènes physiques, mais dans différents systèmes de coordonnées et de temps (*c'est le point de vue passif*). Si  $O$  repère un événement par  $(x, y, z, t)$ ,  $O'$  repérera le même événement par  $(x', y', z', t')$ .

On dit que des équations satisfont un principe de relativité, si elles sont *invariantes de forme ou covariantes* pour un GROUPE de changements de coordonnées des événements. La condition nécessaire et suffisante pour que des équations soient covariantes est qu'elles s'expriment comme des égalités entre des tenseurs de même nature. En effet, i) deux grandeurs de même nature tensorielle égales dans un référentiel sont égales dans tous les référentiels et ii) pour que deux grandeurs puissent être égales dans tous les référentiels, il faut qu'elles soient de même nature tensorielle.

#### 12.1.1 Relativité euclidienne

Le groupe des changements de coordonnées est le groupe euclidien  $E(3)$  des translations, rotations et renversement du trièdre d'espace ou  $E^+(3)$  des translations et rotations. Les changements de coordonnées sont

$$x^k = \sum_{\ell} O^k_{\ell} x'^{\ell} + a^k \quad (12.1.1)$$

$$t = t' \quad (12.1.2)$$

Les  $a^k$  sont les paramètres de la translation, les  $O^k_{\ell}$  sont les éléments d'une matrice réelle  $(3 \times 3)$  orthogonale

$$O O^T = I \quad (12.1.3)$$

Une matrice  $O$  de déterminant égal à  $+1$  définit une rotation, une matrice  $O$  de déterminant égal à  $-1$  peut toujours s'écrire comme le produit d'une matrice de rotation par la matrice  $P = -I$  qui décrit le renversement du trièdre ( $x^k = -x'^k$ ).

Les équations de la mécanique newtonienne du point matériel

$$m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = \bar{F} \quad (12.1.4)$$

où  $m$  est une constante, l'accélération et la force sont des vecteurs, sont bien invariantes de forme pour les changements de coordonnées du groupe euclidien.

Il en va de même pour les équations de Maxwell où  $\rho, \phi$  sont des champs scalaires

$$\rho(\bar{x}(\bar{x}'), t) = \rho'(\bar{x}', t), \quad (12.1.5)$$

$\bar{j}, \bar{A}, \bar{E}, \bar{D}$  sont des champs de vecteurs ( ou vecteurs polaires)

$$A^k(\bar{x}(\bar{x}'), t) = \sum_{\ell} O^k_{\ell} A'^{\ell}(\bar{x}', t) \quad (12.1.6)$$

$$A^k(-\bar{x}, t) = -A'^k(\bar{x}, t) \quad (12.1.7)$$

et  $\bar{B}, \bar{H}$  sont des champs de pseudovecteurs (ou vecteurs axiaux)

$$B^k(\bar{x}(\bar{x}'), t) = \sum_{\ell} O^k_{\ell} B'^{\ell}(\bar{x}', t) \quad (12.1.8)$$

$$B^k(-\bar{x}, t) = B'^k(\bar{x}, t). \quad (12.1.9)$$

$O$  ci-dessus désigne une matrice de rotation.

En physique des particules, les lois des interactions électromagnétiques et fortes sont invariantes de forme pour  $E(3)$ ; les lois des interactions faibles sont invariantes de forme pour  $E^+(3)$  seulement.

## 12.1.2 Relativité Galiléenne

Aux groupes précédents s'ajoutent les translations de temps

$$x^k = x'^k, \quad t = t' + t_0, \quad (12.1.10)$$

le renversement du temps

$$x^k = x'^k, \quad t = -t' \quad (12.1.11)$$

et surtout le groupe de Galilée

$$x^k = x'^k + v^k t \quad (12.1.12)$$

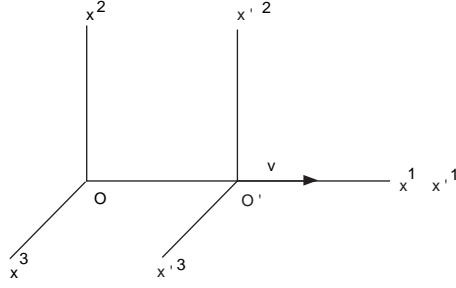
$$t = t', \quad (12.1.13)$$

qui exprime que le trièdre  $(O', x', y', z')$  est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse  $\bar{v}$  par rapport au trièdre  $(O, x, y, z)$ .

Les lois de la mécanique Newtonienne sont invariantes de forme pour ce groupe (qui s'introduit d'ailleurs par là!). Par exemple

$$m \frac{d^2 x^k}{dt^2} = m \frac{d^2}{dt'^2} (x'^k + v^k t') = m \frac{d^2 x'^k}{dt'^2} \quad (12.1.14)$$

et  $F^k = F'^k$ .



### 12.1.3 Groupe simple de Galilée Composition galiléenne des vitesses

Si  $\bar{v} = v \bar{1}_x$ , le changement de coordonnées (12.1.12) se simplifie en

$$x^1 = x'^1 + v t', \quad x^2 = x'^2, \quad x^3 = x'^3, \quad t = t' \quad (12.1.15)$$

$$x'^1 = x^1 - v t, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3, \quad t' = t. \quad (12.1.16)$$

Si un mobile se déplace parallèlement à l'axe  $Ox'$ , avec la vitesse  $w' = \frac{dx'}{dt'}$  par rapport à  $O'$ , sa vitesse  $w = \frac{dx}{dt}$  par rapport à  $O$  est donnée par

$$w = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x' + v t') = w' + v. \quad (12.1.17)$$

En particulier, si le mobile est un signal lumineux, sa vitesse  $c$  par rapport à  $O$  et  $c'$  par rapport à  $O'$  sont liées par

$$c = c' + v. \quad (12.1.18)$$

Les données expérimentales de la fin du XIX<sup>ème</sup> et du début du XX<sup>ème</sup> siècle et notamment les expériences de Michelson et Morley (1887), n'étaient pas en accord avec (12.1.18); au contraire, elles soutenaient l'hypothèse que

$$c = c'. \quad (12.1.19)$$

Notons aussi que les équations de Maxwell ne sont pas conformes au principe de relativité galiléenne. Ceci se voit déjà sur l'équation des ondes dans le vide

$$\square \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta \psi = 0 \quad (12.1.20)$$

Par la transformation (12.1.12), elle devient, avec

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x' + vt', y', z', t') = \psi'(x', y', z', t') \quad (12.1.21)$$

$$\partial_x \psi = \partial_{x'} \psi' \partial_{x'} x' = \partial_{x'} \psi' \quad (12.1.22)$$

$$\partial_x^2 \psi = \partial_{x'}^2 \psi' \quad (12.1.23)$$

$$\partial_t \psi = \partial_{x'} \psi' \partial_t x' + \partial_{t'} \psi' \partial_t t' = (-v \partial_{x'} + \partial_{t'}) \psi' \quad (12.1.24)$$

$$\partial_t^2 \psi = (-v \partial_{x'} + \partial_{t'})^2 \psi' \quad (12.1.25)$$

$$\partial_y^2 \psi = \partial_{y'}^2 \psi' \quad (12.1.26)$$

$$\partial_z^2 \psi = \partial_{z'}^2 \psi', \quad (12.1.27)$$

l'équation

$$\frac{1}{c^2}(-v\partial_{x'} + \partial_{t'})^2 \psi' - \Delta' \psi' = 0, \quad (12.1.28)$$

ou

$$\square' \psi' + \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} - 2 \frac{v}{c^2} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x' \partial t'} = 0. \quad (12.1.29)$$

Clairement, cette équation n'a plus la forme de l'équation des ondes; elle ne décrit plus un phénomène isotrope puisque la coordonnée  $x'$  joue un rôle privilégié.

#### 12.1.4 Etat de la question avant Einstein

Les équations de la mécanique newtonienne sont conformes au principe de relativité galiléenne. Les équations de Maxwell ne le sont pas; elles possèdent comme groupe d'invariance, le groupe de Lorentz (découvert par Poincaré et Lorentz). Au début du XXème siècle [1], l'alternative suivante se présentait: i) soit la mécanique classique est correcte et la relativité galiléenne est la bonne; dans ce cas, les lois de l'électromagnétisme formulées par Maxwell ne sont valables que pour des observateurs privilégiés (par exemple, celui qui est au repos par rapport à "l'éther"), ii) soit les équations de Maxwell sont valables pour tous les observateurs inertiels mais la relativité n'est plus galiléenne. Si l'on tient à un principe de relativité unique valable à la fois pour l'électromagnétisme et pour la mécanique classique, ce sont les équations de Newton qui perdent leur statut fondamental.

Les expériences de Fizeau, plus tard celles de Michelson et Morley et les observations des trajectoires d'électrons dans un champ électrique conjuguées aux succès des travaux de Hertz ont amené Einstein à trancher en faveur de la deuxième hypothèse et à développer sa relativité (ou relativité d'Einstein ou relativité restreinte); elle se base sur deux postulats simples :

1) Toutes les lois de la physique (pas seulement celles de la mécanique et de l'électromagnétisme) doivent être formulées de la même manière par tous les observateurs *inertiels*.

2) La vitesse de la lumière dans le vide est finie et a la même valeur  $c$  pour tous les observateurs inertiels.

## 12.2 Relativité Restreinte

Si la vitesse de la lumière dans le vide est la même pour tous les observateurs inertiels, ceux-ci disposent d'une unité naturelle de vitesse,  $c$ .

Pour repérer les points de l'espace euclidien, ces observateurs utilisent chacun un trièdre trirectangle dextrogyre dont nous supposons, pour simplifier l'analyse, que leur sommet coïncide à l'instant initial, le même pour tous (les changements de coordonnées seront donc homogènes). Nous admettrons aussi qu'ils utilisent des trièdres parallèles et qu'ils gardent la même orientation des axes d'espace et la même orientation du temps.

### 12.2.1 Groupe de la relativité restreinte

Dans un premier temps, nous ne retiendrons que les mouvements suivant l'axe  $Ox$  de l'observateur  $O$ .



Un signal lumineux parti de l'origine  $x = x' = 0$  à l'instant initial  $t = t' = 0$  arrive, pour  $O$ , à l'instant  $t$ , en un point  $x$  donné par

$$\text{soit } \tau_- = ct - x = 0, \quad \text{soit } \tau_+ = ct + x = 0. \quad (12.2.30)$$

Pour l'observateur  $O'$  qui se meut par rapport à  $O$  avec la vitesse  $v$ , les coordonnées  $(x', t')$  de cet événement sont de même liées par

$$\text{soit } \tau'_- = ct' - x' = 0, \quad \text{soit } \tau'_+ = ct' + x' = 0 \quad (12.2.31)$$

puisque la vitesse du signal est également  $c$  pour  $O'$ . Les relations linéaires et homogènes entre les coordonnées  $(ct, x)$  et  $(ct', x')$  d'un même événement doivent être telles que (12.2.30) implique (12.2.31) et inversement; d'où

$$\tau_- = k_-(v) \tau'_- \quad \text{et} \quad \tau_+ = k_+(v) \tau'_+ \quad (12.2.32)$$

avec

$$k_-(v) > 0 \quad \text{et} \quad k_+(v) > 0. \quad (12.2.33)$$

Pour un troisième observateur  $O''$  qui se meut suivant l'axe  $Ox'$ , à la vitesse  $v'$  par rapport à  $O'$ ,

$$\tau_- = k_-(v) \tau'_- \quad \text{et} \quad \tau_+ = k_+(v) \tau'_+ \quad (12.2.34)$$

$$\tau'_- = k_-(v') \tau''_- \quad \text{et} \quad \tau'_+ = k_+(v') \tau''_+ \quad (12.2.35)$$

$$\tau_- = k_-(v) k_-(v') \tau''_- \quad \text{et} \quad \tau_+ = k_+(v) k_+(v') \tau''_+. \quad (12.2.36)$$

Ces formules, avec, pour  $v = 0$ ,

$$k_-(0) = 1 \quad \text{et} \quad k_+(0) = 1 \quad (12.2.37)$$

et, pour  $v' = -v$ ,

$$k_-(-v) = [k_-(v)]^{-1}, \quad k_+(-v) = [k_+(v)]^{-1}, \quad (12.2.38)$$

définissent un groupe de transformations dépendant de  $k_-$  et  $k_+$  et dont la loi de composition est

$$K_-(v, v') = k_-(v) k_-(v'), \quad K_+(v, v') = k_+(v) k_+(v'). \quad (12.2.39)$$

Noter que  $k_+$  et  $k_-$  sont liés à  $\beta = \frac{v}{c}$  par la relation

$$\beta = \frac{k_+(v) - k_-(v)}{k_+(v) + k_-(v)}. \quad (12.2.40)$$

En effet, l'origine  $x' = 0$  des coordonnées de  $O'$  se meut par rapport à  $O$  à la vitesse  $v$  donc

$$x' = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = vt \quad \text{ou} \quad x = \beta \tau, \quad (12.2.41)$$

avec  $\tau = ct$ . Pour ce point,

$$\tau_- = \tau (1 - \beta) = k_-(v) \tau'_- = k_-(v) \tau' \quad (12.2.42)$$

$$\tau_+ = \tau (1 + \beta) = k_+(v) \tau'_+ = k_+(v) \tau' \quad (12.2.43)$$

donc, en prenant le quotient  $\frac{\tau_-}{\tau_+}$ ,

$$k_+(v)(1 - \beta) = k_-(v)(1 + \beta) \quad (12.2.44)$$

et la relation annoncée. Remarquons que (12.2.40) implique

$$\beta^2 = \frac{k_+^2 + k_-^2 - 2k_+k_-}{k_+^2 + k_-^2 + 2k_+k_-} < 1. \quad (12.2.45)$$

Les transformations ci-dessus définissent un groupe pour lequel les vitesses relatives des observateurs sont toutes inférieures à  $c$  en valeur absolue.

Si l'on pose

$$k_{\pm}(v) = \alpha(v)(1 \pm \beta), \quad (12.2.46)$$

avec  $\alpha(v) > 0$  et  $|\beta| < 1$ , les transformations (12.2.32) prennent la forme

$$\begin{cases} \tau &= \alpha(v)(\tau' + \beta x') \\ x &= \alpha(v)(\beta\tau' + x') \end{cases} \quad (12.2.47)$$

La loi de composition des transformations (12.2.47) et de

$$\begin{cases} \tau' &= \alpha(v')(\tau'' + \beta' x'') \\ x' &= \alpha(v')(\beta'\tau'' + x'') \end{cases} \quad (12.2.48)$$

s'exprime à présent comme

$$\begin{cases} \tau &= \alpha(v \star v')(\tau'' + \beta(v \star v')x'') \\ x &= \alpha(v \star v')(\beta(v \star v')\tau'' + x'') \end{cases} \quad (12.2.49)$$

avec

$$\alpha(v \star v') = \alpha(v)\alpha(v')(1 + \beta\beta') \quad (12.2.50)$$

$$\beta(v \star v') = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'}, \quad (12.2.51)$$

avec  $\beta = \frac{v}{c}$  et  $\beta' = \frac{v'}{c}$ .

## 12.2.2 Loi de composition des vitesses

De (12.2.47), on déduit immédiatement que les vitesses  $\frac{w}{c} = \frac{dx}{d\tau}$  et  $\frac{w'}{c} = \frac{dx'}{d\tau'}$  sont liées par

$$w = \frac{w' + v}{1 + \frac{vw'}{c^2}} \quad (12.2.52)$$

au lieu de la loi galiléenne qui reste cependant valable lorsque  $\frac{vw'}{c^2} \ll \ll 1$ . Noter que pour  $w' = c$ , (12.2.52) implique bien  $w = c$ .

### 12.2.3 Expérience de FIZEAU

Soit  $O'$  l'observateur pour lequel la masse d'eau reste immobile et soit  $w' = \frac{c}{n}$  la vitesse de la lumière dans l'eau ( $n$  est l'indice de réfraction de l'eau). Pour l'observateur  $O$  qui voit l'eau s'écouler à la vitesse  $v$ , la vitesse de la lumière vaut

$$w = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{cn}} = c \left[ \frac{1}{n} + \frac{v}{c} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \right]. \quad (12.2.53)$$

Cette formule trouvée par Fresnel est conforme à l'expérience de Fizeau. L'invariance de la vitesse de la lumière rend donc compte très simplement de cette expérience.

### 12.2.4 Groupe simple de LORENTZ

Il reste à exprimer  $\alpha(v)$  en fonction de  $v$ . Pour  $v = 0$ ,  $\alpha(0) = 1$ . Pour  $v' = -v$  ou  $\beta' = -\beta$ , (12.2.50) se réduit à

$$1 = \alpha(v)\alpha(-v)(1 - \beta^2). \quad (12.2.54)$$

L'isotropie de l'espace ajoute la condition

$$\alpha(-v) = \alpha(v). \quad (12.2.55)$$

On en tire donc

$$\alpha(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma, \quad (12.2.56)$$

et le groupe simple de Lorentz qui s'écrit

$$\begin{cases} \tau &= \gamma(\tau' + \beta x') \\ x &= \gamma(\beta \tau' + x'). \end{cases} \quad (12.2.57)$$

Notons aussi la transformation inverse

$$\begin{cases} \tau' &= \gamma(\tau - \beta x) \\ x' &= \gamma(-\beta \tau + x). \end{cases} \quad (12.2.58)$$

Ces transformations laissent invariante la grandeur

$$s^2 = \tau^2 - x^2 = \tau'^2 - x'^2 = s'^2. \quad (12.2.59)$$

### 12.2.5 Dilatation des temps

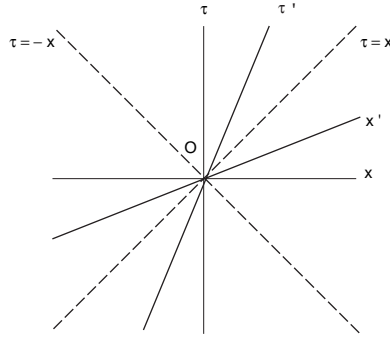
Soit  $\Delta\tau$  l'intervalle de temps, mesuré par  $O$ , entre deux événements situés au même point de l'espace, donc pour lesquels  $\Delta x = 0$ . Cet intervalle de temps mesuré par  $O'$  est donné, par

$$\Delta\tau' = \gamma \Delta\tau > \Delta\tau. \quad (12.2.60)$$

Noter que pour  $O'$ , les deux événements sont situés en des points différents de l'espace: par (12.2.58)

$$\Delta x' = -\beta \gamma \Delta\tau. \quad (12.2.61)$$

Pour l'observateur  $O$ , il s'agit d'un *intervalle de temps propre*; pour  $O'$  et tous les autres observateurs, l'intervalle de temps mesuré est *impropre* et plus grand que l'intervalle de temps propre. Ce phénomène de dilatation des temps est bien vérifié expérimentalement sur la vie moyenne des particules instables.



### 12.2.6 Contraction des longueurs

Soit  $\Delta x' = x'_1 - x'_2 = L'$  la distance mesurée par  $O'$  entre deux points fixes par rapport à  $O'$ . Si l'observateur  $O$  convient de mesurer la distance  $L$  entre ces deux points au même instant  $t$ , donc pour  $\Delta\tau = 0$ , alors, par (12.2.58),

$$\Delta x' = \gamma \Delta x \quad \rightarrow \quad L = \Delta x = \frac{1}{\gamma} \Delta x' = \frac{1}{\gamma} L' < L'. \quad (12.2.62)$$

Pour  $O$ , il y a donc contraction des longueurs.

## 12.3 Espace-temps de MINKOWSKI à 1+1 dimensions

Les nombres  $(\tau = ct, x)$  définissent un point  $P$  du plan  $R^2$  rapporté à un système de coordonnées rectilignes orthogonales. Ce plan est structuré en espace-temps de Minkowski (à 1+1 dimensions) lorsqu'il est muni d'une distance minkowskienne.

La *distance minkowskienne*  $d(P_1, P_2)$  entre les points  $P_1, (\tau_1, x_1)$ , et  $P_2, (\tau_2, x_2)$ , est définie par

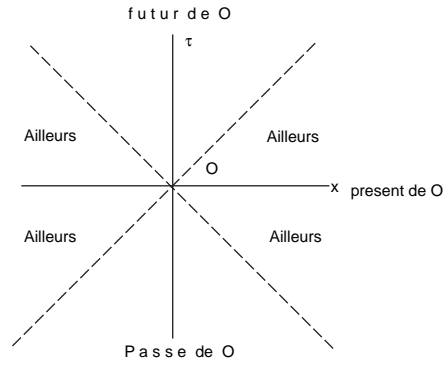
$$d^2(P_1, P_2) = (\tau_1 - \tau_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = \Delta\tau^2 - \Delta x^2. \quad (12.3.63)$$

Cette distance est symétrique  $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$ ; mais son carré  $d^2$  peut être positif (distance de *type-temps*), négatif (distance de *type-espace*) ou nul (distance de *type-lumière*). La grandeur

$$s^2 = \tau_+ \tau_- = \tau^2 - x^2 = d^2(P, 0) \quad (12.3.64)$$

définie plus haut, conservée par les transformations de Lorentz, n'est autre que le carré de la distance minkowskienne entre le point  $P$  de coordonnées  $(\tau, x)$  et le point  $O$  pris comme origine des coordonnées  $(0, 0)$ .

L'équation  $s^2 = 0$  est celle d'une conique dégénérée en deux droites, *les droites de lumière*:  $\tau_+ = 0$  et  $\tau_- = 0$ . L'équation  $s^2 = \text{constante} > 0$  est celle d'une hyperbole dont l'axe de temps (qui la coupe) et l'axe  $Ox$  sont des diamètres conjugués et dont les droites de lumière sont les asymptotes. La région où  $s^2 = \tau_+ \tau_- > 0$  est formée de deux parties: celle où  $\tau_+ > 0$  et  $\tau_- > 0$  est le *futur* du point pris comme origine des coordonnées, celle où  $\tau_+ < 0$  et  $\tau_- < 0$  est son *passé*. Son *présent* est la droite de type espace d'équation  $\tau = 0$ . L'équation  $s^2 = \text{constante} < 0$  est celle d'une hyperbole située dans la région *ailleurs* du point origine.



Toutes ces notions sont invariantes pour les changements de coordonnées du groupe simple de Lorentz. La **symétrie d'espace**

$$P : \quad \tau = \tau' \quad \text{et} \quad x = -x' \quad (12.3.65)$$

permuté les deux droites de lumière. Le **retournement du temps**

$$T : \quad \tau = -\tau' \quad \text{et} \quad x = x' \quad (12.3.66)$$

permuté les deux droites de lumière et échange passé et avenir. La **symétrie par rapport à l'origine**

$$TP : \quad \tau = -\tau' \quad \text{et} \quad x = -x' \quad (12.3.67)$$

permuté avenir et passé et change le sens des axes  $\tau_+$  et  $\tau_-$ .

### 12.3.1 Vecteurs, Produit scalaire minkowskien

Les *vecteurs* issus de l'origine forment un espace vectoriel réel à 2 dimensions  $V$ . Nous noterons  $\bar{X}$  le vecteur d'origine  $O$  et d'extrémité  $P$  de coordonnées  $(\tau, x) = (x^0, x^1)$ . Une base de cet espace vectoriel est fournie par les vecteurs  $\{\bar{e}_0, \bar{e}_1\}$  d'extrémités respectives  $(1,0)$  et  $(0,1)$ . Dans cette base, le vecteur  $\bar{X}$  s'exprime comme

$$\bar{X} = \bar{e}_0 \tau + \bar{e}_1 x = \bar{e}_0 x^0 + \bar{e}_1 x^1 = \bar{e}_\mu x^\mu, \quad \mu = 0,1. \quad (12.3.68)$$

Le produit scalaire est, comme d'habitude, une application bilinéaire symétrique de  $V \times V$  dans  $\mathbb{R}$ , mais il n'est plus défini positif. Il est complètement défini par les produits scalaires des vecteurs d'une base; nous choisissons

$$\bar{e}_\mu \cdot \bar{e}_\nu = \eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu} \quad (12.3.69)$$

ou

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (12.3.70)$$

de sorte que

$$\bar{X} \cdot \bar{Y} = (\bar{e}_\mu x^\mu) \cdot (\bar{e}_\nu y^\nu) = x^\mu y^\nu \eta_{\mu\nu} = x^0 y^0 - x^1 y^1 \quad (12.3.71)$$

et que

$$\bar{X}^2 = \bar{X} \cdot \bar{X} = (x^0)^2 - (x^1)^2 = s^2. \quad (12.3.72)$$

Le vecteur  $\bar{X}$  est dit *de type temps* si  $\bar{X}^2 > 0$ , *de type lumière* si  $\bar{X}^2 = 0$  et de *type espace* si  $\bar{X}^2 < 0$ . Exemples:  $\bar{e}_0$  est de type temps,  $\bar{e}_1$  est de type espace,  $\bar{e}_0 \pm \bar{e}_1$  sont de type lumière.

Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

### 12.3.2 Changements de base, groupe de Lorentz $L(2)$

Toute matrice  $\Lambda$  réelle,  $2 \times 2$ , inversible définit un changement de base au point  $O$  par

$$\bar{e}'_\mu = \bar{e}_\nu \Lambda^\nu_\mu, \quad \det \Lambda \neq 0. \quad (12.3.73)$$

Dans un tel changement de base,

$$\bar{X} = \bar{e}_\mu x^\mu = \bar{e}'_\nu x'^\nu, \quad x^\nu = \Lambda^\nu_\mu x'^\mu. \quad (12.3.74)$$

ou, explicitement

$$x^0 = \Lambda^0_0 x'^0 + \Lambda^0_1 x'^1 \quad (12.3.75)$$

$$x^1 = \Lambda^1_0 x'^0 + \Lambda^1_1 x'^1. \quad (12.3.76)$$

Les changements de base sur lesquels nous focaliserons notre attention ici sont ceux qui conservent les produits scalaires des vecteurs de base, c'est-à-dire, ceux pour lesquels

$$\eta'_{\mu\nu} = \bar{e}'_\mu \cdot \bar{e}'_\nu = \bar{e}_\mu \cdot \bar{e}_\nu = \eta_{\mu\nu} \quad (12.3.77)$$

ou encore, ceux dont les matrices  $\Lambda$  sont telles que

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta}, \quad (12.3.78)$$

ou, en notations matricielles,

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \quad (12.3.79)$$

Par définition,  $L(2)$  est l'ensemble des matrices  $\Lambda$ , réelles  $2 \times 2$  qui satisfont cette propriété. On vérifie aisément (exercice) que  $L(2)$  forme un groupe pour la multiplication des matrices. En prenant le déterminant des deux membres de (12.3.79), on obtient

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} \det \Lambda = 1 \\ \det \Lambda = -1 \end{cases} \quad (12.3.80)$$

Les relations (12.3.78) s'explicitent en

$$(\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^1_0)^2 = 1 \quad (12.3.81)$$

$$(\Lambda^0_1)^2 - (\Lambda^1_1)^2 = -1 \quad (12.3.82)$$

$$\Lambda^0_0 \Lambda^0_1 - \Lambda^1_0 \Lambda^1_1 = 0. \quad (12.3.83)$$

La relation (12.3.81) a pour conséquence que

$$(\Lambda^0_0)^2 \geq 1 \rightarrow \begin{cases} \Lambda^0_0 \geq 1 \\ \Lambda^0_0 \leq -1. \end{cases} \quad (12.3.84)$$

Avec (12.3.80) et (12.3.84), l'ensemble  $L(2)$  peut être vu comme la réunion des 4 sous-ensembles disjoints définis comme suit

$$L^{\uparrow}_+(2) = \{\Lambda \in L(2), \det \Lambda = 1 \text{ et } \Lambda^0_0 \geq 1\} \quad (12.3.85)$$

$$II = \{\Lambda \in L(2), \det \Lambda = 1 \text{ et } \Lambda^0_0 \leq -1\} \quad (12.3.86)$$

$$III = \{\Lambda \in L(2), \det \Lambda = -1 \text{ et } \Lambda^0_0 \geq 1\} \quad (12.3.87)$$

$$IV = \{\Lambda \in L(2), \det \Lambda = -1 \text{ et } \Lambda^0_0 \leq -1\}. \quad (12.3.88)$$

Nous nous intéresserons d'abord à  $L_+^\uparrow(2)$  qui, parmi ces divers sous-ensembles est le seul à contenir la matrice unité  $I$  (et à former un groupe). Remarquons d'emblée que la matrice  $\Lambda$  définie par la transformation (12.2.57), avec

$$\Lambda_0^0 = \gamma = \Lambda_1^1, \quad \Lambda_1^0 = \Lambda_0^1 = \beta \gamma \quad (12.3.89)$$

est dans  $L_+^\uparrow(2)$ . Nous allons à présent montrer que tout élément de  $L_+^\uparrow(2)$  peut se mettre sous cette forme: en effet, pour  $\Lambda \in L_+^\uparrow(2)$ , la première relation (12.3.81) permet d'écrire en toute généralité

$$\Lambda_0^0 = \cosh r, \quad \Lambda_1^0 = \sinh r. \quad (12.3.90)$$

En portant ceci dans la troisième relation (12.3.83) et dans la relation

$$\det \Lambda = \Lambda_0^0 \Lambda_1^1 - \Lambda_1^0 \Lambda_0^1 = 1, \quad (12.3.91)$$

on en tire, dans l'ordre,

$$\Lambda_1^0 = \tanh r \Lambda_1^1, \quad \Lambda_1^1 = \cosh r \quad \text{donc} \quad \Lambda_0^1 = \sinh r. \quad (12.3.92)$$

La deuxième équation (12.3.82) est alors identiquement satisfaite. Il ne nous reste plus qu'à identifier

$$\tanh r = \beta = \frac{v}{c}. \quad (12.3.93)$$

$L_+^\uparrow(2)$  est donc le groupe simple de Lorentz obtenu antérieurement. Le paramètre réel  $r$  introduit ici est appelé rapidité, il peut varier de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Comme fonction de la rapidité  $r$ , la matrice  $\Lambda$  prend la forme

$$\Lambda(r) = \begin{pmatrix} \cosh r & \sinh r \\ \sinh r & \cosh r \end{pmatrix} \quad (12.3.94)$$

La loi de composition des éléments du groupe devient alors simplement

$$\Lambda(r) \Lambda(r') = \Lambda(r + r') \quad (12.3.95)$$

équivalente à la loi de composition des vitesses

$$\tanh(r + r') = \frac{\tanh r + \tanh r'}{1 + \tanh r \tanh r'} = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'} = B(v, v') = \frac{V}{c}. \quad (12.3.96)$$

La relation (12.3.95) et

$$\Lambda(0) = I, \quad \text{donc} \quad \Lambda(-r) = \Lambda^{-1}(r) \quad (12.3.97)$$

indiquent que  $L_+^\uparrow(2)$  est un sous-groupe à un paramètre de  $L(2)$ .

Regardons les autres sous-ensembles de  $L(2)$  définis en (12.3.85) à (12.3.88). Le sous-ensemble  $II$  contient la matrice

$$TP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I, \quad (12.3.98)$$

III contient la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (12.3.99)$$

IV contient la matrice

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -P. \quad (12.3.100)$$

Les matrices  $\{I, TP, T, P\}$  sont toutes de carré égal à  $I$ .

**Théorème 12.1.** *Toute matrice  $\Omega$  de  $L(2)$  est le produit d'un élément  $\Lambda$  de  $L_+^\uparrow(2)$  par l'une des matrices  $I, T, P, TP$*

$$\Omega = \Lambda \cdot \begin{pmatrix} I \\ TP \\ P \\ T \end{pmatrix} \quad (12.3.101)$$

où  $\Lambda \in L_+^\uparrow(2)$ . La démonstration est évidente si  $\Omega \in L_+^\uparrow(2)$  car alors  $\Omega = \Lambda$ . Si  $\Omega \in II$ , la matrice

$$\Omega.TP = -\Omega \quad (12.3.102)$$

est toujours de déterminant égal à un, mais  $[\Omega.TP]_0^0 = -[\Omega]_0^0$  est  $\geq 1$  donc  $[\Omega.TP] \in L_+^\uparrow(2)$ , en posant  $\Lambda = \Omega.TP$ , puis en multipliant les deux membres par la matrice  $TP$ , à droite, il vient  $\Omega = \Lambda.TP$ . La démonstration se poursuit de la même façon pour les autres sous ensembles.

### 12.3.3 Groupe de POINCARÉ $P(2)$

Toute la structure vectorielle et toute la structure métrique de l'espace-temps de Minkowski se transportent par translations en n'importe quel autre point du plan.

Le groupe de Poincaré  $P(2)$  est le produit "semi-direct" de  $L(2)$  par le groupe des translations. Les transformations de coordonnées qu'il engendre sont

$$x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x'^\nu + a^\mu \quad (12.3.103)$$

où  $\Lambda \in L(2)$  et les  $a^\mu$  sont les paramètres de la translation. L'origine du nouveau système de coordonnées ( $x'^\mu = 0$ ) est en ( $x^\mu = a^\mu$ ). Un élément du groupe est un couple  $(\Lambda, a^\mu)$ . La loi de groupe est

$$(\Lambda_1, a_1^\mu) (\Lambda_2, a_2^\mu) = (\Lambda_1 \Lambda_2, \Lambda_1^\mu_\nu a_2^\nu + a_1^\mu). \quad (12.3.104)$$

$P(2)$  est le groupe des changements de coordonnées qui laissent invariant le carré de la distance entre deux points

$$d^2(P_1, P_2) = (\Delta s)^2 = (\Delta \tau)^2 - (\Delta x)^2 \quad (12.3.105)$$

où  $\Delta x^\mu = x_1^\mu - x_2^\mu$  est la différence des coordonnées des événements  $x_1^\mu$  et  $x_2^\mu$ . Autrement dit,  $P(2)$  est le groupe des isométries de l'espace-temps de Minkowski à 1 + 1 dimensions.

Le carré de la distance entre deux points,  $d^2(P_1, P_2)$  est aussi le carré de la norme du vecteur  $\overline{P_1 P_2}$ :

$$d^2(P_1, P_2) = d^2(x_1, x_2) = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu. \quad (12.3.106)$$



## 12.4 Groupe de Lorentz $L(4)$ , Espace-temps de Minkowski à 1 + 3 dimensions

Retournons au début du paragraphe 13.2.1; considérons les mêmes référentiels et un signal lumineux qui part de l'origine ( $x = 0, y = 0, z = 0$ ) à l'instant initial, mais cette fois dans toute direction. Pour  $O$ , il se trouve à l'instant  $t$  sur la sphère d'équation

$$\tau^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (12.4.107)$$

et pour  $O'$ , sur la sphère

$$\tau'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \quad (12.4.108)$$

Les relations linéaires et homogènes entre les coordonnées  $(x, y, z, \tau)$  et  $(x', y', z', \tau')$  d'un même événement doivent être telles que (12.4.107) implique (12.4.108) et inversement, d'où

$$\tau^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = K [\tau'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2)]. \quad (12.4.109)$$

Mais nous savons déjà que

$$\tau^2 - x^2 = \tau'^2 - x'^2 \quad (12.4.110)$$

donc

$$K = 1. \quad (12.4.111)$$

On arrive à la même conclusion si  $O'$  se meut par rapport à  $O$  selon l'axe Oy, Oz ou dans une direction quelconque, et quelles que soient les orientations relatives des trièdres, à la condition que ceux-ci soient en mouvement rectiligne uniforme.

L'ESPACE-TEMPS DE MINKOWSKI à 1+3 dimensions est l'espace des rendez-vous! C'est l'espace  $\mathbb{R}^4$ , dont chaque point représente un événement  $(\tau, x, y, z)$  ou  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$ , et qui est muni d'une distance minkowskienne définie par

$$d^2(P_1, P_2) = (\tau_1 - \tau_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 \quad (12.4.112)$$

$$s^2 = d^2(P, 0) = \tau^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \quad (12.4.113)$$

L'équation  $s^2 = 0$  est celle d'un cône (*le cône de lumière*) dont le sommet est à l'origine des coordonnées; la région  $s^2 \geq 0$  et  $x^0 > 0$  est le futur du point origine; la région  $s^2 \geq 0$  et  $x^0 < 0$  est son passé. L'équation  $s^2 = \text{constante} > 0$  est celle d'un "hyperboloïde" à 2 nappes (l'une dans le passé, l'autre dans le futur du point origine);  $s^2 = \text{constante} < 0$  est un "hyperboloïde" à une nappe, située dans "l'ailleurs" du point origine.

Les vecteurs issus de l'origine forment un espace vectoriel réel à 4 dimensions  $M_0^4$ , équipé du produit scalaire minkowskien

$$\bar{X} = \bar{e}_\mu x^\mu \quad (12.4.114)$$

$$\bar{e}_\mu \cdot \bar{e}_\nu = \eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (12.4.115)$$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (12.4.116)$$

et

$$\bar{X} \cdot \bar{X}' = \eta_{\mu\nu} x^\mu x'^\nu = x^0 x'^0 - x^1 x'^1 - x^2 x'^2 - x^3 x'^3 \quad (12.4.117)$$

$$\bar{X}^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = s^2 \quad (12.4.118)$$

où  $\eta_{\mu\nu}$  sont les composantes du tenseur métrique. Tout vecteur  $\bar{X}$  possède une norme dont le carré

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (12.4.119)$$

est invariant sous les transformations de Lorentz.

Le Groupe de la RELATIVITÉ RESTREINTE est le groupe des transformations linéaires inversibles qui laissent invariant

$$d^2(P, P') = (\Delta s)^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2 \quad (12.4.120)$$

$$= \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu. \quad (12.4.121)$$

C'est le groupe des isométries de l'espace-temps de Minkowski à 1 + 3 dimensions. Lorsque les sommets des trièdres de référence des observateurs coïncident à l'instant initial qui est le même pour tous, c'est le groupe de LORENTZ HOMOGENE  $L(4)$  formé des matrices réelles  $\Lambda$ ,  $4 \times 4$  qui vérifient

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta; \quad (12.4.122)$$

dans le cas plus général, c'est le groupe de POINCARÉ  $P(4)$  ou groupe de LORENTZ INHOMOGENE, produit "semi-direct" de  $L(4)$  par le groupe des translations.

Le sous-groupe  $L_+^\uparrow$  (*groupe propre orthochrone*) est constitué de l'ensemble des matrices de  $L(4)$  telles que

$$\det \Lambda = 1 \quad \text{et} \quad \Lambda^0_0 \geq 1. \quad (12.4.123)$$

**Théorème 12.2.** *Toute matrice de  $L(4)$  est le produit d'une matrice de  $L_+^\uparrow$  par l'une des quatre matrices  $(I, P, T, TP = -I)$*

où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (12.4.124)$$

$P$  est la matrice du renversement du trièdre d'espace,  $T$  la matrice du renversement du temps et  $TP = -I$  la matrice de la symétrie par rapport à l'origine. La démonstration est la même que pour  $L(2)$ .

Les éléments de  $L_+^\uparrow$  pour lesquels

$$\Lambda^0_0 = 1 \quad \rightarrow \quad \Lambda^0_k = 0 = \Lambda^k_0 \quad (12.4.125)$$

engendrent les rotations spatiales, produits des sous-groupes à un paramètre suivants

$$R(\alpha, \bar{1}_x) = e^{\alpha M^{(23)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (12.4.126)$$

$$R(\alpha, \bar{1}_y) = e^{\alpha M^{(31)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (12.4.127)$$

$$R(\alpha, \bar{1}_z) = e^{\alpha M^{(12)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.4.128)$$

Les autres éléments de  $L_+^\uparrow$  sont des produits de rotations et de "boosts" (= mouvement rectiligne uniforme de vitesse  $v$  dans une direction). En particulier,  $L_+^\uparrow$  contient les sous-groupes à un paramètre suivants

$$B(r, \bar{1}_x) = e^{r M^{(01)}} = \begin{pmatrix} \cosh r & \sinh r & 0 & 0 \\ \sinh r & \cosh r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.4.129)$$

$$B(r, \bar{1}_y) = e^{r M^{(02)}} = \begin{pmatrix} \cosh r & 0 & \sinh r & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh r & 0 & \cosh r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.4.130)$$

$$B(r, \bar{1}_z) = e^{r M^{(03)}} = \begin{pmatrix} \cosh r & 0 & 0 & \sinh r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh r & 0 & 0 & \cosh r \end{pmatrix} \quad (12.4.131)$$

qui décrivent respectivement un boost de rapidité  $r$  dans la direction  $\bar{1}_x, \bar{1}_y, \bar{1}_z$ .

**Théorème 12.3.** *Toute matrice  $\Lambda$  de  $L_+^\uparrow$  peut se mettre sous la forme*

$$\Lambda = R_1 B(r, \bar{1}_z) R_2 \quad (12.4.132)$$

où  $R_1$  et  $R_2$  sont des matrices de rotations et  $B(r, \bar{1}_z)$  est la matrice du boost de rapidité  $r$  dans la direction  $\bar{1}_z$ .

La démonstration en est donnée, par exemple, dans le cours de Compléments de math.de 1ère licence.

## 12.5 Transformations de Lorentz infinitésimales

Celles-ci sont les transformations de Lorentz "proches du neutre": elles sont de la forme

$$\Lambda = I + \epsilon M \quad (12.5.133)$$

où  $\epsilon$  est un infiniment petit réel. La condition  $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ , au premier ordre en  $\epsilon$ , contraint la matrice  $M$  de satisfaire l'égalité

$$M^T \eta + \eta M = 0 \leftrightarrow M^T = -\eta M \eta^{-1} \quad (12.5.134)$$

ou, pour ses éléments

$$M^\mu{}_\nu \eta_{\mu\alpha} + \eta_{\nu\lambda} M^\lambda{}_\alpha = 0, \quad (12.5.135)$$

ou explicitement

$$M^0{}_0 = M^1{}_1 = M^2{}_2 = M^3{}_3 = 0 \quad (12.5.136)$$

$$M^0{}_1 = M^1{}_0, \quad M^0{}_2 = M^2{}_0, \quad M^0{}_3 = M^3{}_0 \quad (12.5.137)$$

$$M^1{}_2 = -M^2{}_1, \quad M^2{}_3 = -M^3{}_2, \quad M^3{}_1 = -M^1{}_3 \quad (12.5.138)$$

Si l'on convient de définir

$$M_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\lambda} M^\lambda{}_\beta, \quad (12.5.139)$$

la condition (12.5.134) devient

$$M_{\nu\alpha} + M_{\alpha\nu} = 0 \leftrightarrow M_{\nu\alpha} = -M_{\alpha\nu}. \quad (12.5.140)$$

L'ensemble des matrices  $M$  qui satisfont cette condition forme un espace *vectoriel réel* à 6 dimensions: en effet, on vérifie aisément que toute combinaison linéaire réelle de matrices qui satisfont (12.5.134) satisfait aussi (12.5.134). Une base de cet espace vectoriel est fournie par les matrices

$$M^{(23)} = -M^{(32)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^{(31)} = -M^{(13)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12.5.141)$$

$$M^{(12)} = -M^{(21)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^{(01)} = -M^{(10)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12.5.142)$$

$$M^{(02)} = -M^{(20)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^{(03)} = -M^{(30)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12.5.143)$$

Leurs éléments de matrice sont donnés par

$$[M^{(\alpha\beta)}]^\mu{}_\nu = \eta^{\alpha\mu} \delta_\nu^\beta - \eta^{\beta\mu} \delta_\nu^\alpha. \quad (12.5.144)$$

### 12.5.1 Algèbre de Lie $so(1,3)$

Le commutateur  $[M_1, M_2] = M_1 M_2 - M_2 M_1$  de deux matrices qui satisfont la relation (12.5.134) satisfait encore la relation (12.5.134). En effet, soient  $M_1$  et  $M_2$  telles que  $M_1^T = -\eta M_1 \eta^{-1}$  et  $M_2^T = -\eta M_2 \eta^{-1}$ , alors

$$[M_1, M_2]^T = M_2^T M_1^T - M_1^T M_2^T = -\eta [M_1, M_2] \eta^{-1}. \quad (12.5.145)$$

Rappelons que le commutateur de deux matrices est antisymétrique et qu'il vérifie l'identité de Jacobi

$$[M_1, M_2] = -[M_2, M_1] \quad (12.5.146)$$

$$[[M_1, M_2], M_3] + [[M_2, M_3], M_1] + [[M_3, M_1], M_2] = 0. \quad (12.5.147)$$

En particulier, le commutateur de deux matrices de la base définie ci-dessus peut s'exprimer comme combinaison linéaire des matrices de la base: en notant  $\{T_a, (a = 1, \dots, 6)\}$ , une base,

$$[T_a, T_b] = T_c C_{ab}^c \quad (12.5.148)$$

les coefficients réels  $C_{ab}^c = -C_{ba}^c$  qui apparaissent dans ces combinaisons linéaires sont appelés *constantes de structure*: elles dépendent de la base et sont les composantes d'un tenseur une fois contravariant, deux fois covariant. On trouve ici

$$[M^{(\alpha\beta)}, M^{(\lambda\mu)}] = -\eta^{\alpha\lambda} M^{(\beta\mu)} + \eta^{\alpha\mu} M^{(\beta\lambda)} + \eta^{\beta\lambda} M^{(\alpha\mu)} - \eta^{\beta\mu} M^{(\alpha\lambda)} \quad (12.5.149)$$

Par exemple:

$$[M^{(12)}, M^{(23)}] = M^{(31)}, \quad [M^{(23)}, M^{(31)}] = M^{(12)} \quad (12.5.150)$$

$$[M^{(31)}, M^{(12)}] = M^{(23)}, \quad [M^{(01)}, M^{(02)}] = -M^{(12)} \quad (12.5.151)$$

$$[M^{(02)}, M^{(03)}] = -M^{(23)}, \quad [M^{(03)}, M^{(01)}] = -M^{(31)} \quad (12.5.152)$$

Le calcul des autres commutateurs est proposé comme exercice.

L'ensemble des matrices  $M$  qui vérifient (12.5.134) est donc plus qu'un simple espace vectoriel: le commutateur lui confère une structure *d'algèbre de Lie*, c'est l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz, elle est notée  $so(1,3)$ .

L'ensemble des matrices  $\Lambda$  de  $L(4)$  de déterminant égal à 1 est un sous-groupe de  $L(4)$  aussi noté  $SO(1,3)$ .

## Chapitre 13

# Tenseurs de l'espace-temps de Minkowski

### 13.1 Tenseurs de l'espace affín réel

Par définition, les coordonnées  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  et  $(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$  d'un même point  $P$  dans deux référentiels sont liés par des relations (affines) linéaires et inversibles

$$x^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu{}_\nu x'^\nu + a^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x'^\nu + a^\mu. \quad (13.1.1)$$

Ce changement de coordonnées induit, en  $P$ , le changement de base naturelle suivant

$$\bar{e}'_\mu = \bar{e}_\nu \Lambda^\nu{}_\mu. \quad (13.1.2)$$

Le scalaire  $S$  en  $P$  est un nombre réel: il a la même valeur dans tous les référentiels

$$S = S'. \quad (13.1.3)$$

Un élément  $\bar{A}$  de  $V_P$  est un *vecteur ou vecteur contravariant* en  $P$ . Ses composantes contravariantes dans les deux référentiels sont liées par

$$\bar{A} = \bar{e}_\mu A^\mu = \bar{e}'_\mu A'^\mu \quad (13.1.4)$$

$$A^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A'^\nu, \quad A'^\mu = [\Lambda^{-1}]^\mu{}_\nu A^\nu. \quad (13.1.5)$$

Exemple: le vecteur  $d\bar{x}$  dont les composantes sont reliées par

$$dx^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx'^\nu. \quad (13.1.6)$$

On appelle *covecteur ou vecteur covariant*,  $\underline{B}$  en  $P$ , un élément du vectoriel dual  $V_P^*$ . Ses composantes covariantes dans les deux référentiels duaux sont liées par

$$\underline{B} = \underline{e}^\mu B_\mu = \underline{e}'^\mu B'_\mu \quad (13.1.7)$$

$$B'_\mu = B_\nu \Lambda^\nu{}_\mu, \quad B_\mu = B'_\nu [\Lambda^{-1}]^\nu{}_\mu. \quad (13.1.8)$$

Les covecteurs  $\{\underline{e}^\mu\}$  forment la base duale de la base  $\{\bar{e}_\mu\}$  définie par  $\underline{e}^\mu(\bar{e}_\nu) = \delta^\mu_\nu$ . Au changement de base (13.1.2) correspond le changement de base duale

$$\underline{e}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \underline{e}'^\nu. \quad (13.1.9)$$

Exemple: L'opérateur **gradient**  $\underline{\nabla} = \underline{e}^\mu \partial_\mu$  se comporte comme un covecteur; ses composantes

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{et} \quad \partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \quad (13.1.10)$$

sont reliées par la règle de dérivation en chaîne

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \quad (13.1.11)$$

Le tenseur *deux fois contravariant*  $T$  en  $P$  est un élément de  $V_P \otimes V_P$

$$T = T^{\mu\nu} \bar{e}_\mu \otimes \bar{e}_\nu = T'^{\mu\nu} \bar{e}'_\mu \otimes \bar{e}'_\nu \quad (13.1.12)$$

$$T^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta T'^{\alpha\beta}, \quad T'^{\mu\nu} = \Lambda^{-1\mu}_\alpha \Lambda^{-1\nu}_\beta T^{\alpha\beta} \quad (13.1.13)$$

Le tenseur *deux fois covariant*  $U$  est un élément de  $V_P^* \otimes V_P^*$

$$U = U_{\mu\nu} \underline{e}^\mu \otimes \underline{e}^\nu = U'_{\mu\nu} \underline{e}'^\mu \otimes \underline{e}'^\nu \quad (13.1.14)$$

$$U'_{\mu\nu} = U_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu, \quad U_{\mu\nu} = U'_{\alpha\beta} \Lambda^{-1\alpha}_\mu \Lambda^{-1\beta}_\nu. \quad (13.1.15)$$

Il y a deux types de *tenseurs mixtes une fois contravariant et une fois covariant* qui sont des éléments de  $V_P \otimes V_P^*$  ou de  $V_P^* \otimes V_P$ :

$$V = V^\mu_\nu \bar{e}_\mu \otimes \underline{e}^\nu, \quad W = W_\nu^\mu \underline{e}^\nu \otimes \bar{e}_\mu \quad (13.1.16)$$

$$V^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\alpha V'^\alpha_\beta [\Lambda^{-1}]^\beta_\nu, \quad W_\nu^\mu = \Lambda^\mu_\alpha W'^\alpha_\beta [\Lambda^{-1}]^\beta_\nu. \quad (13.1.17)$$

Ces définitions s'étendent facilement aux tenseurs  $p$  fois contravariants et  $q$  fois covariants.

**Théorème 13.1.** *Si les  $A^\mu$  sont les composantes d'un vecteur contravariant et  $B_\mu$  sont les composantes d'un vecteur covariant, la grandeur*

$$S = A^\mu B_\mu \quad (13.1.18)$$

*est un scalaire.*

En effet

$$S = A^\mu B_\mu = \Lambda^\mu_\alpha [\Lambda^{-1}]^\beta_\mu A'^\alpha B'_\beta = \delta^\beta_\alpha A'^\alpha B'_\beta = A'^\alpha B'_\alpha = S'. \quad (13.1.19)$$

**Théorème 13.2.** *Inversément, si  $S = A^\mu B_\mu$  est un scalaire,  $\forall A^\mu$  composantes du vecteur  $\bar{A}$ , alors les  $B_\mu$  se transforment comme les composantes d'un vecteur covariant*

En effet, par hypothèse

$$A^\mu B_\mu = A'^\nu B'_\nu = \Lambda^\mu_\nu A'^\nu B_\mu, \quad \forall A'^\nu \quad (13.1.20)$$

d'où

$$B'_\nu = \Lambda^\mu_\nu B_\mu. \quad (13.1.21)$$

**Théorème 13.3.** *Inversément, si  $S = A^\mu B_\mu$  est un scalaire,  $\forall B_\mu$  composantes du vecteur covariant  $\underline{B}$ , alors les  $A^\mu$  se transforment comme les composantes d'un vecteur contravariant.*

La démonstration est la même que ci-dessus.

**Théorème 13.4.** *ou Théorème des indices muets. Si les*

$$T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1} \alpha_p}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{q-1} \beta_q} \quad (13.1.22)$$

sont les composantes d'un tenseur  $p$  fois contravariant et  $q$  fois covariant, alors les

$$T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1} \mu}_{\mu \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{q-1}} \quad (13.1.23)$$

sont les composantes d'un tenseur  $(p-1)$  fois contravariant et  $(q-1)$  fois covariant.

La démonstration est l'extension directe de celle du théorème énoncé ci-dessus.

Les réciproques se vérifient de même à l'aide des réciproques du théorème précédent.

Exemples: si  $A^\mu = T^{\mu\nu} B_\nu$  sont les composantes contravariantes d'un vecteur,  $\forall B_\nu$ , alors les  $T^{\mu\nu}$  sont les composantes d'un tenseur 2 fois contravariant; si  $A^\mu = T^{\mu\nu} B_\nu$  sont les composantes contravariantes d'un vecteur,  $\forall T^{\mu\nu}$ , alors les  $B_\nu$  sont les composantes d'un vecteur covariant.

**Remarque 13.1.** *Toutes les composantes des tenseurs se comportent comme des scalaires pour le sous-groupe des translations pures  $x^\mu = x'^\mu + a^\mu$ .*

Le tenseur  $\delta$  de Kronecker est le tenseur une fois contravariant et une fois covariant dont les composantes dans le référentiel  $(x)$  sont définies par

$$\delta_\nu^\mu = \begin{cases} 1 & \text{pour } \mu = \nu \\ 0 & \text{pour } \mu \neq \nu \end{cases}. \quad (13.1.24)$$

Dans le référentiel  $(x')$ ,

$$\delta'^\mu_\nu = [\Lambda^{-1}]^\mu_\alpha \Lambda^\beta_\nu \delta^\alpha_\beta = \delta^\mu_\nu. \quad (13.1.25)$$

On dit que  $\delta$  est un tenseur *numériquement invariant*.

La grandeur réelle  $D$  est une *densité de poids  $p$* , ( $p$  entier), si ses valeurs dans deux référentiels sont reliées par

$$D = (\det \Lambda)^{-p} D'. \quad (13.1.26)$$

Un scalaire est une densité de poids zéro. On appelle densité tensorielle de poids  $p$  un objet dont les composantes se transforment comme le produit des composantes d'un tenseur par une densité de poids  $p$ .

Le symbole  $\epsilon_{\alpha\beta\lambda\mu}$  de Levi-Civita est complètement antisymétrique tel que

$$\epsilon_{\alpha\beta\lambda\mu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha\beta\lambda\mu \text{ est une permutation paire de } 0,1,2,3 \\ -1 & \text{si } \alpha\beta\lambda\mu \text{ est une permutation impaire de } 0,1,2,3 \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases} \quad (13.1.27)$$

Il s'introduit dans le calcul du déterminant d'une matrice  $4 \times 4$ :

$$\det a = \epsilon_{\alpha\beta\lambda\mu} a^\alpha_0 a^\beta_1 a^\lambda_2 a^\mu_3. \quad (13.1.28)$$



En particulier, soit  $a$  la matrice dont les colonnes sont formées des composantes de 4 vecteurs  $\bar{A}_\beta$ ,  $\beta = 0,1,2,3$ ,  $a^\alpha_\beta = A^\alpha_\beta$ ; alors

$$D = \epsilon_{\alpha\beta\lambda\mu} A_0^\alpha A_1^\beta A_2^\lambda A_3^\mu \quad (13.1.29)$$

est le volume sous-tendu par ces vecteurs. Dans le changement de référentiel,  $A_\gamma^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta A'^\beta_\gamma$ ,

$$D = \det (\Lambda^\alpha_\beta A'^\beta_\gamma) = (\det \Lambda) D' \quad (13.1.30)$$

car le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit des déterminants.  $D$  est donc une densité de poids ( $p = -1$ ). On en déduit par le théorème des indices muets que les  $\epsilon_{\alpha\beta\lambda\mu}$  ont la variance du produit d'une densité de poids (-1) par 4 vecteurs covariants (C'est une densité tensorielle de type  $\binom{0}{4}$  et de poids -1): ses composantes dans les référentiels ( $x'$ ) et ( $x$ ) sont donc reliées par

$$\epsilon'_{\alpha'\beta'\lambda'\mu'} = (\det \Lambda)^{-1} \epsilon_{\alpha\beta\lambda\mu} \Lambda^\alpha_{\alpha'} \Lambda^\beta_{\beta'} \Lambda^\lambda_{\lambda'} \Lambda^\mu_{\mu'}. \quad (13.1.31)$$

Ce symbole est *numériquement invariant*.

Par définition les composantes  $\epsilon_{\alpha\beta\lambda\mu}$  dont deux indices prennent la même valeur sont nulles; les autres sont égales au signe près à  $\epsilon = \epsilon_{0123} = 1$ :

$$\epsilon_{\alpha\beta\lambda\mu} = (-1)^p \epsilon \quad (13.1.32)$$

où  $p$  est la parité de la permutation  $(\alpha\beta\lambda\mu) \rightarrow (0123)$ . Le membre de droite de (13.1.31) est nul si deux des indices  $(\alpha'\beta'\lambda'\mu')$  sont égaux;

$$\epsilon'_{0123} = (\det \Lambda)^{-1} \det \Lambda \epsilon = \epsilon = 1 \quad (13.1.33)$$

et permuter deux indices  $(\alpha'\beta'\lambda'\mu')$  revient à permuter deux colonnes dans le déterminant de  $\Lambda$ .

Le symbole  $\mathcal{E}^{\alpha\beta\lambda\mu}$  est complètement antisymétrique et  $\mathcal{E}^{0123} = 1$ ; il permet également de calculer le déterminant d'une matrice:

$$\det a = \mathcal{E}^{\alpha\beta\lambda\mu} a^\alpha_0 a^\beta_1 a^\lambda_2 a^\mu_3. \quad (13.1.34)$$

Ses composantes dans les référentiels ( $x$ ) et ( $x'$ ) sont reliées par

$$\mathcal{E}^{\alpha\beta\lambda\mu} = (\det \Lambda)^{-1} \Lambda^\alpha_{\alpha'} \Lambda^\beta_{\beta'} \Lambda^\lambda_{\lambda'} \Lambda^\mu_{\mu'} \mathcal{E}'^{\alpha'\beta'\lambda'\mu'}; \quad (13.1.35)$$

elles ont la variance du produit d'une densité de poids 1 par quatre vecteurs contravariants (C'est une densité tensorielle de type  $\binom{4}{0}$  et de poids 1). Cette grandeur est également numériquement invariante.

La démonstration est la même que ci-dessus.

Un *champ tensoriel* ou champ de tenseurs est une grandeur tensorielle définie en chaque point de l'espace. Dans ce cas, pour que les lois de transformations tensorielles soient des identités en les  $x$  ou les  $x'$ , il faut remplacer les  $x'$  en fonction des  $x$  ou les  $x$  en fonction des  $x'$ : par exemple, les composantes d'un champ vectoriel sont reliées par

$$A^\mu(x(x')) = \Lambda^\mu_\nu A'^\nu(x'). \quad (13.1.36)$$

Un exemple de densité de poids  $p = -1$  est fourni par l'élément de volume

$$d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \det \left[ \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} \right] d^4x' = \det \Lambda d^4x'. \quad (13.1.37)$$

## 13.2 Introduction d'une métrique

Lorsque l'espace tangent est équipé d'une métrique symétrique et non dégénérée

$$\bar{e}_\mu \cdot \bar{e}_\nu = g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}, \quad g = \det(g_{\mu\nu}) \neq 0, \quad (13.2.38)$$

on peut identifier l'espace vectoriel  $V_P$  et l'espace vectoriel dual  $V_P^*$  par

$$\underline{B} = \underline{e}^\mu B_\mu \leftrightarrow \bar{B} = \bar{e}_*^\mu B_\mu \quad (13.2.39)$$

$$\underline{B}(\bar{A}) = \bar{B} \cdot \bar{A}, \quad \forall \bar{A}. \quad (13.2.40)$$

On introduit alors, dans  $V_P$ , la base réciproque  $\{\bar{e}_*^\mu\}$  telle que

$$\underline{e}^\mu(\bar{e}_\nu) = \bar{e}_*^\mu \cdot \bar{e}_\nu = \delta_\nu^\mu, \quad (13.2.41)$$

et

$$\bar{e}_*^\mu \cdot \bar{e}_*^\nu = g^{\mu\nu}, \quad \bar{e}_*^\mu = g^{\mu\nu} \bar{e}_\nu, \quad \bar{e}_\mu = g_{\mu\nu} \bar{e}_*^\nu. \quad (13.2.42)$$

Rappelons que lors du changement de base

$$\bar{e}'_\nu = e_\mu \Lambda^\mu{}_\nu \quad (13.2.43)$$

la base réciproque se transforme par

$$\bar{e}_*'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{e}_*^{\nu}. \quad (13.2.44)$$

Il en résulte

$$g'_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \quad (13.2.45)$$

qui exprime que les  $g_{\mu\nu}$  sont les composantes d'un tenseur symétrique deux fois covariant. De plus, pour le déterminant de la métrique, on a

$$g' = (\det \Lambda)^2 g; \quad (13.2.46)$$

le déterminant de la métrique,  $g$ , est donc une densité scalaire de poids 2 et  $\sqrt{|g|}$  est une densité de poids 1. Le tenseur métrique et son inverse de composantes  $g^{\mu\nu}$  sont utilisés pour abaisser ou élever des indices. Par exemple,

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu, \quad A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \quad (13.2.47)$$

sont les composantes covariantes et contravariantes d'un même vecteur; de même,

$$T^{\mu\nu}, T^\mu{}_\alpha = T^{\mu\nu} g_{\nu\alpha}, T_\mu{}^\nu = g_{\mu\alpha} T^{\alpha\nu}, T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} T^{\alpha\beta} \quad (13.2.48)$$

sont les composantes de variances diverses d'un même tenseur.

*Tenseur de Levi-Civita:* Il résulte de la loi de transformation du symbole de Levi-Civita (13.1.31) et de (13.2.46) que les gradeurs

$$e_{\alpha\beta\lambda\mu} = \sqrt{|g|} \epsilon_{\alpha\beta\lambda\mu} \quad (13.2.49)$$

sont les composantes covariantes d'un tenseur complètement antisymétrique dont les composantes contravariantes sont

$$e^{\alpha\beta\lambda\mu} = e_{\alpha'\beta'\lambda'\mu'} g^{\alpha'\alpha} g^{\beta'\beta} g^{\lambda'\lambda} g^{\mu'\mu} = \sqrt{|g|} g^{-1} \epsilon^{\alpha\beta\lambda\mu}. \quad (13.2.50)$$

Noter aussi que  $dv = \sqrt{|g|} d^4x$  est l'élément de volume invariant:  $dv = dv'$ .

La famille d'hyperplans à 3 dimensions d'équation  $n_\alpha x^\alpha = \text{constante}$  est orthogonale au vecteur  $\bar{n}$ . Les points de l'hyperplan de type espace  $x^0 = a$ , pour lequel  $n_0 = 1, n_k = 0$ , sont repérés par les coordonnées  $(x^1, x^2, x^3)$ ; l'élément de "surface" à 3 dimensions sur cet hyperplan est orienté suivant la normale et a comme grandeur  $d\Sigma = d^3x$

$$d\bar{\Sigma} = \bar{n} d\Sigma = \bar{n} d^3x. \quad (13.2.51)$$

### 13.3 Tenseurs de l'espace-temps de Minkowski

L'espace-temps de Minkowski est un espace affiné réel muni d'une métrique

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (13.3.52)$$

Cette forme quadratique est particulière, en ce sens que

- i) il existe des systèmes de coordonnées rectilignes pour lesquelles les composantes du tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  sont des constantes (les  $g_{\mu\nu}$  ne dépendent pas des  $x$ );
- ii) sa signature<sup>1</sup> est (-2), c'est-à-dire que, diagonalisée, la matrice  $g$  a sur sa diagonale principale un terme positif et trois termes négatifs (signature = +1 - 3 = -2).

A partir d'un référentiel où les  $g_{\mu\nu}$  sont des constantes, on obtient tous les autres par les transformations affines (13.1.1). Nous travaillons toujours dans un tel référentiel avec les coordonnées  $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$  pour lesquelles

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad (13.3.53)$$

avec

$$\eta_{\mu\nu} = 0 \quad \text{pour} \quad \mu \neq \nu, \quad \eta_{00} = 1, \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1. \quad (13.3.54)$$

Les  $\eta_{\mu\nu}$  sont donc les composantes d'un tenseur symétrique 2 fois covariant

$$\eta'_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu, \quad \eta' = \Lambda^T \eta \Lambda. \quad (13.3.55)$$

**Théorème 13.5.**  $\eta_{\mu\nu}$  est numériquement invariant, c'est-à-dire

$$\eta'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad (13.3.56)$$

pour les matrices  $\Lambda$  qui satisfont

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu, \quad \eta = \Lambda^T \eta \Lambda \quad (13.3.57)$$

c'est-à-dire pour celles qui appartiennent au groupe de Lorentz  $L(4)$ .

---

1. En Relativité générale, on préfère travailler en signature +2.

Les éléments  $\eta^{\mu\nu}$  de la matrice  $\eta^{-1}$  sont les composantes d'un tenseur symétrique 2 fois contravariant; ce tenseur est aussi numériquement invariant pour le groupe de Lorentz car l'inverse de (13.3.57), multiplié à gauche par  $\Lambda$  et à droite par  $\Lambda^T$  fournit

$$\eta^{-1} = \Lambda \eta^{-1} \Lambda^T, \quad \eta^{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta. \quad (13.3.58)$$

### d'Alembertien

Il résulte de (13.3.58) que *l'opérateur d'Alembertien* est un opérateur invariant pour le groupe de Lorentz-Poincaré; en effet

$$\square' = \eta^{\mu\nu} \partial'_\mu \partial'_\nu = \eta^{\mu\nu} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \partial_\alpha \partial_\beta = \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta = \square. \quad (13.3.59)$$

Le symbole  $\partial_\mu$  est utilisé pour désigner la dérivée partielle par rapport à la coordonnée  $x^\mu$ , c'à d

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (13.3.60)$$

Par contre, le symbole  $\partial^\mu$  désigne

$$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu. \quad (13.3.61)$$

Noter encore que pour  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , le déterminant de la métrique vaut  $g = \eta = \det(\eta_{\mu\nu}) = -1$  donc  $\sqrt{|g|} = \sqrt{|\eta|} = 1$ . Il vient alors, pour le tenseur de Levi-Civita, en utilisant (13.2.49), que,

$$e^{0123} = -1 \mathcal{E}^{0123} = -1. \quad (13.3.62)$$

Puisque les matrices de  $L(4)$  ont leur déterminant égal à +1 ou à -1, pour le groupe de Lorentz, une densité de poids  $\pm p$  pair est un scalaire, une densité de poids  $\pm p$  impair est un pseudoscalaire. On appelle pseudovecteur un tenseur dont la variance est celle du produit d'un vecteur par un pseudoscalaire.

Le sous-groupe  $L_+(4) = SO(1,3)$  formé des matrices  $\Lambda \in L(4)$  dont le déterminant vaut  $\det \Lambda = 1$  ne distingue pas les tenseurs des pseudotenseurs.

## Chapitre 14

# Electromagnétisme dans l'espace-temps de Minkowski

Le but poursuivi dans ce chapitre est de prouver la covariance relativiste des équations de Maxwell. Pour cela, nous allons montrer que les différentes grandeurs électromagnétiques peuvent se regrouper en des tenseurs de l'espace-temps Minkowski. Nous nous limiterons aux transformations de  $L_+(4)$  qui ne distinguent pas les tenseurs des densités tensorielles.

Nous nous occuperons d'abord des sources et champs dans le vide.

### 14.1 Le vecteur densité-courant

Si une charge  $Q$  est immobile par rapport à l'observateur  $O$ , pour  $O'$  en mouvement rectiligne uniforme par rapport à  $O$ , cette charge est en mouvement et produit un courant. Il semble donc naturel de regrouper les distributions de charges et de courants

$$J^0 = c\rho \quad \text{et} \quad J^1 = j_x, \quad J^2 = j_y, \quad J^3 = j_z \quad (14.1.1)$$

en un seul vecteur  $\bar{J}$  de composantes contravariantes  $J^\mu$ ,

$$J^\mu(x(x')) = \Lambda^\mu_\nu J'^\nu(x'). \quad (14.1.2)$$

Pour un boost dans la direction  $\bar{1}_x$ , par exemple, avec  $\tanh r = \beta$ ,

$$c\rho(x(x')) = \gamma [c\rho'(x') + \beta J'^1(x')] \quad (14.1.3)$$

$$J^1(x(x')) = \gamma [\beta c\rho'(x') + J'^1(x')] \quad (14.1.4)$$

$$J^2(x(x')) = J'^2(x') \quad (14.1.5)$$

$$J^3(x(x')) = J'^3(x'). \quad (14.1.6)$$

La loi de conservation du courant s'écrit, pour  $O$

$$\partial_t \rho + \partial_k j^k = 0 \rightarrow \partial_\mu J^\mu(x) = 0; \quad (14.1.7)$$

et puisque  $\partial_\mu J^\mu$  est un scalaire, elle s'écrit de la même façon pour  $O'$ , à savoir

$$\partial'_\mu J'^\mu(x') = 0. \quad (14.1.8)$$

La loi de conservation du courant est donc une loi covariante.

On en déduit immédiatement *l'invariance de la quantité d'électricité*: en effet, soit

$$dq' = \rho'(x') dx'^1 dx'^2 dx'^3 \quad (14.1.9)$$

une quantité d'électricité mesurée par O' et immobile par rapport à lui:  $J'^0 = c\rho', J'^k = 0$ . Pour O, par (14.1.3),

$$\rho(x) = \gamma \rho'(x'(x)) \quad (14.1.10)$$

et, à cause de la contraction des longueurs,

$$dx^1 = \frac{1}{\gamma} dx'^1, \quad dx^2 = dx'^2, \quad dx^3 = dx'^3. \quad (14.1.11)$$

On a donc bien

$$dq = dq'. \quad (14.1.12)$$

## 14.2 Tenseur champ électrique-induction magnétique

Pour les mêmes raisons que celles invoquées ci-dessus, une charge immobile par rapport à O produit, pour celui-ci un champ électrique  $\vec{E}$  tandis que pour O', en mouvement rectiligne par rapport à O, elle produit en plus un champ magnétique  $\vec{B}$ . On regroupe  $\vec{E}, \vec{B}$  dans une même grandeur antisymétrique  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ , à 6 composantes, en posant

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (14.2.13)$$

Les équations de Maxwell avec sources

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{E}}{c} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} c \rho = \mu_0 c \rho \quad (14.2.14)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \partial_t \frac{\vec{E}}{c} = \mu_0 \vec{j} \quad (14.2.15)$$

s'écrivent à présent

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu; \quad (14.2.16)$$

ce sont des équations covariantes si les deux membres ont la même variance. Or le membre de droite est formé des composantes contravariantes d'un vecteur; il en sera donc de même pour le membre de gauche si les  $F^{\mu\nu}$  sont les composantes contravariantes d'un tenseur antisymétrique. Remarquer que l'antisymétrie de  $F^{\mu\nu}$  a pour conséquence

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 = \partial_\nu J^\nu. \quad (14.2.17)$$

Les équations de Maxwell sans sources

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \quad (14.2.18)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (14.2.19)$$

prennent la forme

$$\partial_\alpha {}^*F^{\alpha\beta} = 0 \quad (14.2.20)$$

équivalente à

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \quad (14.2.21)$$

où

$${}^*F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} e^{\alpha\beta\lambda\mu} F_{\lambda\mu} \quad (14.2.22)$$

et  $e^{\alpha\beta\lambda\mu}$  est le tenseur complètement antisymétrique 4 fois contravariant défini au chapitre précédent, avec  $e^{0123} = -1$ . En effet,

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} F^{\alpha\beta} \quad (14.2.23)$$

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (14.2.24)$$

et

$$({}^*F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z/c & E_y/c \\ -B_y & E_z/c & 0 & -E_x/c \\ -B_z & -E_y/c & E_x/c & 0 \end{pmatrix}. \quad (14.2.25)$$

Pour  $\beta = 0$ , (14.2.20) devient

$$\partial_k {}^*F^{k0} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \overline{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (14.2.26)$$

Pour  $\beta = 1$ , l'équation

$$\partial_0 {}^*F^{01} + \partial_2 {}^*F^{21} + \partial_3 {}^*F^{31} = 0 \quad (14.2.27)$$

n'est autre que (14.2.21) avec  $\mu = 0, \nu = 2, \lambda = 3$

$$-\partial_0 F_{23} - \partial_2 F_{30} - \partial_3 F_{02} = 0 \quad (14.2.28)$$

ou encore

$$\frac{1}{c} \partial_t B_x + \partial_2 \frac{E_z}{c} + \partial_3 \left(-\frac{E_y}{c}\right) = 0. \quad (14.2.29)$$

Les 2 autres équations vectorielles s'obtiennent à partir de (14.2.20) pour  $\beta = 2$  et  $\beta = 3$ . Ces équations (14.2.20) sont covariantes car  ${}^*F^{\mu\nu}$  est un tenseur antisymétrique: c'est le tenseur dual de  $F^{\mu\nu}$ .

### 14.3 Tenseur déplacement électrique-champ magnétique

Pour obtenir les équations de Maxwell macroscopiques, on doit introduire à côté du tenseur champ électrique-induction magnétique  $F^{\mu\nu}$ , un second tenseur antisymétrique  $H^{\mu\nu} = -H^{\nu\mu}$ , déplacement électrique-champ magnétique

$$(H^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -cD_x & -cD_y & -cD_z \\ cD_x & 0 & -H_z & H_y \\ cD_y & H_z & 0 & -H_x \\ cD_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \quad (14.3.30)$$

en terme duquel les équations de Maxwell avec sources prennent la forme

$$\partial_\mu H^{\mu\nu} = J_{ext}^\nu. \quad (14.3.31)$$

Dans le vide  $F^{\mu\nu} = \mu_0 H^{\mu\nu}$ ; dans un milieu linéaire, homogène, isotrope, non-dispersif et non-conducteur,  $F^{\mu\nu} = \mu H^{\mu\nu}$ .

## 14.4 Le vecteur potentiel électromagnétique

L'induction magnétique et le champ électrique s'écrivent en terme des potentiels comme

$$\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A} \quad (14.4.32)$$

$$\bar{E} = -\bar{\nabla}\phi - \partial_t \bar{A}. \quad (14.4.33)$$

Avec les notations

$$A_0 = \frac{\phi}{c}, \quad A_1 = -A_x, \quad A_2 = -A_y, \quad A_3 = -A_z, \quad (14.4.34)$$

les champs se récrivent sous la forme

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (14.4.35)$$

Puisque les  $F_{\mu\nu}$  sont les composantes covariantes d'un tenseur, les composantes  $A_\mu$  ainsi introduites sont les composantes covariantes d'un vecteur. Ses composantes contravariantes sont

$$A^0 = \frac{\phi}{c}, \quad A^1 = A_x, \quad A^2 = A_y, \quad A^3 = A_z, \quad (14.4.36)$$

Pour le boost dans la direction  $\bar{1}_x$ , par exemple,

$$\frac{\phi(x)}{c} = \gamma \left[ \frac{\phi'(x'(x))}{c} + \beta A'_x(x'(x)) \right] \quad (14.4.37)$$

$$A_x(x) = \gamma \left[ \beta \frac{\phi'(x'(x))}{c} + A'_x(x'(x)) \right] \quad (14.4.38)$$

$$A_y(x) = A'_y(x'(x)) \quad (14.4.39)$$

$$A_z(x) = A'_z(x'(x)) \quad (14.4.40)$$

### 14.4.1 Charge en mouvement rectiligne uniforme

Soit  $Q' = Q$  une charge immobile, à l'origine de  $O'$ . Dans ce référentiel, elle produit au point P de coordonnées  $(x'^1, x'^2, x'^3)$  un champ électrostatique de potentiel coulombien

$$\phi'(x'^k) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{(x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2}} \quad (14.4.41)$$

$$A'_x = A'_y = A'_z = 0. \quad (14.4.42)$$



Pour O, cette charge est en mouvement rectiligne uniforme de vitesse  $v$  selon l'axe des  $x$  et produit donc, au même point P, le potentiel

$$\phi(x) = \gamma \phi'(x'^k(x)) \quad (14.4.43)$$

$$A_x(x) = \gamma \beta \frac{1}{c} \phi'(x'^k(x)) \quad (14.4.44)$$

$$A_y(x) = 0 \quad (14.4.45)$$

$$A_z(x) = 0 \quad (14.4.46)$$

#### 14.4.2 Equations du potentiel électromagnétique

Les *transformations de jauge* des potentiels deviennent, pour  $f$  scalaire de classe  $C^2$ ,

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f(x). \quad (14.4.47)$$

Ces transformations laissent invariant le champ é.m.

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = F_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu f - \partial_\nu \partial_\mu f = F_{\mu\nu}. \quad (14.4.48)$$

Dans la jauge de Lorenz, c'est-à-dire, pour un potentiel qui satisfait la condition

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (14.4.49)$$

(qui est bien aussi une condition covariante!), les équations aux potentiels (dans le vide) s'écrivent

$$\square A^\mu = \mu_0 J^\mu. \quad (14.4.50)$$

Ces équations sont covariantes puisque le d'Alembertien est un opérateur scalaire pour les transformations de  $L_+(4)$ .

### 14.5 Le vecteur fréquence-nombre d'ondes

Soit, pour l'observateur O,

$$A_\mu(x) = a_\mu e^{i\phi(x)} \quad , \quad \phi(x) = \omega t - \bar{k} \cdot \bar{x}, \quad (14.5.51)$$

le potentiel d'une onde plane monochromatique de fréquence  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  et de longueur d'onde  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{c}{\nu}$ , dans le vide, émise par une source située à l'infini, au repos par rapport à O.

Pour O', ce potentiel devient

$$A'_\mu(x') = A_\nu(x(x')) \Lambda^\nu_\mu = a_\nu \Lambda^\nu_\mu e^{i\phi(x(x'))}. \quad (14.5.52)$$

Si on pose

$$k^0 = \frac{\omega}{c}, \quad k^1 = k_x, \quad k^2 = k_y, \quad k^3 = k_z, \quad (14.5.53)$$

il vient

$$\phi(x) = k_\mu x^\mu \quad (14.5.54)$$

et, pour les transformations de Lorentz homogènes,

$$\phi(x(x')) = k_\mu (\Lambda^\mu_\nu x'^\nu) = (k_\mu \Lambda^\mu_\nu) x'^\nu = k'_\nu x'^\nu = \phi'(x') \quad (14.5.55)$$

où

$$k'_\nu = k_\mu \Lambda^\mu_\nu. \quad (14.5.56)$$

Les  $k^\mu$  sont donc les composantes contravariantes d'un vecteur. La phase  $\phi$  est un scalaire.

Le vecteur fréquence-nombre d'ondes est de type lumière

$$\bar{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \leftrightarrow k_\mu k^\mu = 0. \quad (14.5.57)$$

Pour O', la fréquence de l'onde plane monochromatique  $\nu' = \frac{\omega'}{2\pi}$ , sa longueur d'onde  $\lambda' = \frac{c}{\nu'}$  et sa direction de propagation se tirent de

$$k'^0 = \frac{\omega'}{c}, \quad k'^1 = k'_x, \quad k'^2 = k'_y, \quad k'^3 = k'_z. \quad (14.5.58)$$

Remarque: (14.5.57) assure que le potentiel (14.5.51) est solution de l'équation de d'Alembert; de plus, il vérifie la condition de jauge de Lorentz si

$$k_\mu a^\mu = 0; \quad (14.5.59)$$

si l'on introduit, en plus du vecteur  $\bar{k}$ , le vecteur  $\bar{\ell}$  de type lumière, de composantes

$$\ell^0 = k^0, \quad \ell^j = -k^j, \quad j = 1, 2, 3 \quad (14.5.60)$$

et deux vecteurs de type espace  $\bar{e}_1, \bar{e}_2$  orthogonaux entre eux et orthogonaux à  $\bar{k}$  et  $\bar{\ell}$ , le quadri-vecteur le plus général orthogonal à  $\bar{k}$  a pour composantes

$$a^\mu = d k^\mu + c_1 e_1^\mu + c_2 e_2^\mu; \quad (14.5.61)$$

qui ne diffère de  $\tilde{a}^\mu = c_1 e_1^\mu + c_2 e_2^\mu$  que par un vecteur proportionnel à  $\bar{k}$ . Les potentiels (14.5.51) et

$$\tilde{A}_\mu = \tilde{a}_\mu e^{i\phi(x)} \quad (14.5.62)$$

ne diffèrent que par une transformation de jauge.

## 14.5.1 Application: l'effet Doppler

### Effet Doppler longitudinal

Pour une onde plane (14.5.51) qui se propage dans la direction des x croissants, le vecteur fréquence-nombre d'onde est  $\bar{k} = k^0 \bar{1}_0 + k_x \bar{1}_x$ , pour O,

$$k_x = k^1, \quad k_y = k^2 = 0, \quad k_z = k^3 = 0, \quad \frac{\omega}{c} = k^0 = k^1. \quad (14.5.63)$$

Pour O' en mouvement rectiligne de vitesse v par rapport à O,

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma \left[ \frac{\omega}{c} - \beta k^1 \right] \quad (14.5.64)$$

$$k'^1 = \gamma \left[ -\beta \frac{\omega}{c} + k^1 \right] \quad (14.5.65)$$

$$k'^2 = k^2 \quad (14.5.66)$$

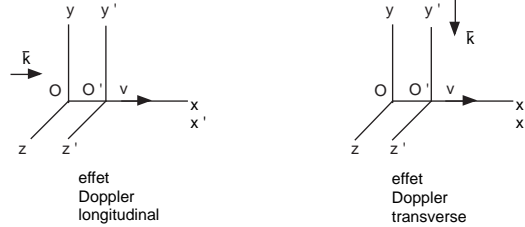
$$k'^3 = k^3 \quad (14.5.67)$$

d'où

$$\omega' = \gamma [1 - \beta] \omega = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \omega. \quad (14.5.68)$$

Pour  $\beta > 0$ ,  $O'$  s'éloigne de la source et la fréquence  $\nu'$  est plus petite que  $\nu$ . Pour  $\beta^2 \ll 1$ , (14.5.68) devient

$$\frac{\omega - \omega'}{\omega} = \beta. \quad (14.5.69)$$



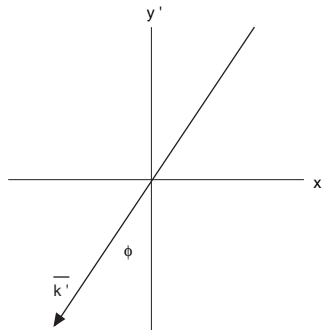
### Effet Doppler transverse

Si l'onde plane se propage dans la direction  $\bar{1}_y$ ,  $\bar{k} = k^0 \bar{1}_0 + k_y \bar{1}_y$ ,  $k^1 = k_x$  étant nul, on tire des relations ci-dessus que, pour  $O'$ ,

$$\omega' = \gamma \omega > \omega. \quad (14.5.70)$$

L'effet est cette fois du second ordre en  $\frac{v}{c}$ .

### 14.5.2 Application: aberration des étoiles fixes



Si une étoile fixe pour  $O$  en  $(x^1 = 0, x^2 = +\infty, x^3 = 0)$  émet une onde plane monochromatique dans la direction  $\bar{1}_y$ ,  $\bar{k} = k^0 \bar{1}_0 - k \bar{1}_y$ ,  $k > 0$ ,

$$k^1 = 0, \quad k^2 = -k, \quad k^3 = 0, \quad k^0 = k = -k^2. \quad (14.5.71)$$

Pour  $O'$ , la direction de propagation de l'onde est donnée par

$$k'^1 = -\gamma \beta k, \quad k'^2 = k^2 = -k, \quad k'^3 = 0; \quad (14.5.72)$$

ce tri-vecteur  $\bar{k}'$  fait avec l'axe  $y'$  négatif un angle  $\Phi$  dont la tangente vaut

$$\tan \Phi = \frac{k'^1}{k'^2} = \gamma \beta. \quad (14.5.73)$$

## 14.6 Le vecteur puissance-force de Lorentz

Ce vecteur est défini par ses composantes covariantes

$$F_\mu = F_{\mu\nu} J^\nu. \quad (14.6.74)$$

Ses composantes spatiales contravariantes sont les composantes cartésiennes de la densité de force de Lorentz: par exemple

$$F^1 = F^{1\nu} J_\nu = F^{10} J_0 + F^{12} J_2 + F^{13} J_3 = \rho E_x + (\bar{j} \times \bar{B})_x; \quad (14.6.75)$$

tandis que sa composante temporelle vaut

$$F^0 = F^{0\nu} J_\nu = \frac{1}{c} \bar{E} \cdot \bar{j}. \quad (14.6.76)$$

## 14.7 Les tenseurs bilinéaires en $F_{\mu\nu}$ et $H_{\mu\nu}$

A l'aide des tenseurs  $F$  et  $H$ , on peut former  
**des scalaires**

$$A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} H^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\bar{E} \cdot \bar{D} - \bar{B} \cdot \bar{H}) \quad (14.7.77)$$

$$B = -\frac{1}{4} {}^*F_{\mu\nu} H^{\mu\nu} = \frac{c}{2} (\bar{B} \cdot \bar{D} + \frac{1}{c^2} \bar{E} \cdot \bar{H}) \quad (14.7.78)$$

Dans le vide, ils se réduisent à

$$A = \frac{\epsilon_0}{2} (\bar{E}^2 - c^2 \bar{B}^2) \quad (14.7.79)$$

$$B = \epsilon_0 c \bar{E} \cdot \bar{B}. \quad (14.7.80)$$

**des tenseurs à deux indices**

$$A_\alpha^\beta = A \delta_\alpha^\beta \quad (14.7.81)$$

$$B_\alpha^\beta = B \delta_\alpha^\beta \quad (14.7.82)$$

$$U_\alpha^\beta = -F_{\alpha\mu} H^{\beta\mu} = (F H)_\alpha^\beta \quad (14.7.83)$$

$$V_\alpha^\beta = -{}^*F_{\alpha\mu} H^{\beta\mu} = ({}^*F H)_\alpha^\beta \quad (14.7.84)$$

Notons, en particulier que

$$U_0^0 = \bar{E} \cdot \bar{D} \quad V_0^0 = -c \bar{B} \cdot \bar{D} \quad (14.7.85)$$

$$U_1^0 = -c (\bar{D} \times \bar{B})_x \quad V_1^0 = -(\bar{D} \times \bar{E})_x \quad (14.7.86)$$

$$U_0^1 = \frac{1}{c} (\bar{E} \times \bar{H})_x \quad V_0^1 = -(\bar{B} \times \bar{H})_x \quad (14.7.87)$$

## 14.8 Le tenseur densité d'énergie-impulsion é.m.

Il est défini par

$$T_{\mu}^{\nu} = F_{\mu\beta} H^{\beta\nu} - \frac{1}{4} \delta_{\mu}^{\nu} F_{\alpha\beta} H^{\beta\alpha}. \quad (14.8.88)$$

Sa dénomination se justifie par l'interprétation physique de ses composantes: en effet, en termes de la densité d'énergie  $w = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$ , de la densité d'impulsion  $\vec{p} = \vec{D} \times \vec{B}$ , du vecteur de Poynting  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  et des tensions de Maxwell, il s'écrit

$$(T_{\mu}^{\nu}) = \begin{pmatrix} w & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ -c p_x & E_x D_x + B_x H_x - w & E_x D_y + B_x H_y & E_x D_z + B_x H_z \\ -c p_y & E_y D_x + H_y B_x & E_y D_y + B_y H_y - w & E_y D_z + B_y H_z \\ -c p_z & E_z D_x + H_z B_x & E_z D_y + H_z B_y & E_z D_z + B_z H_z - w \end{pmatrix} \quad (14.8.89)$$

Sa trace est nulle:

$$T_{\mu}^{\mu} = 0. \quad (14.8.90)$$

Ses composantes deux fois contravariantes sont

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu}_{\beta} H^{\beta\nu} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} H^{\beta\alpha} \quad (14.8.91)$$

Ce tenseur est symétrique lorsque  $F_{\mu\nu} = \mu H_{\mu\nu}$ .

### 14.8.1 Le bilan d'énergie-impulsion

En vertu des équations de Maxwell, il s'écrit comme

$$\partial_{\nu} T_{\mu}^{\nu} = -F_{\mu\alpha} J_{ext}^{\alpha} - \frac{1}{4} [(\partial_{\mu} F_{\alpha\beta}) H^{\alpha\beta} - F_{\alpha\beta} (\partial_{\mu} H^{\alpha\beta})]. \quad (14.8.92)$$

Le deuxième terme du membre de droite est nul dans un milieu linéaire et homogène.

En effet,

$$\partial_{\nu} T_{\mu}^{\nu} = -\partial_{\nu} (F_{\mu\beta} H^{\nu\beta}) + \frac{1}{4} \partial_{\mu} (F_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta}). \quad (14.8.93)$$

Pour le premier terme du membre de droite, il vient

$$-\partial_{\nu} (F_{\mu\beta} H^{\nu\beta}) = -(\partial_{\nu} F_{\mu\beta}) H^{\nu\beta} - F_{\mu\beta} \partial_{\nu} H^{\nu\beta} \quad (14.8.94)$$

$$= -(\partial_{\nu} F_{\mu\beta}) H^{\nu\beta} - F_{\mu\beta} J_{ext}^{\beta} \quad (14.8.95)$$

en vertu de l'équation (14.3.31). Pour le deuxième terme du membre de droite, il vient

$$\frac{1}{4} \partial_{\mu} (F_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta}) = \frac{1}{4} [(\partial_{\mu} F_{\alpha\beta}) H^{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta} \partial_{\mu} H^{\alpha\beta}]. \quad (14.8.96)$$

Notons que le terme proportionnel au courant dans (14.8.95) et le terme proportionnel aux dérivées de  $H$  dans (14.8.96) sont égaux à ceux qui figurent dans le membre de droite de (14.8.92). Nous ne nous occuperons donc que des termes de (14.8.95) et (14.8.96) proportionnels à  $H$ . Notons d'abord que

$$-(\partial_{\nu} F_{\mu\beta}) H^{\nu\beta} = -(\partial_{\alpha} F_{\mu\beta}) H^{\alpha\beta} \quad (14.8.97)$$

$$= -\frac{1}{2} (\partial_{\alpha} F_{\mu\beta} - \partial_{\beta} F_{\mu\alpha}) H^{\alpha\beta} \quad (14.8.98)$$

$$= -\frac{1}{2} (\partial_{\mu} F_{\alpha\beta}) H^{\alpha\beta}. \quad (14.8.99)$$

La première égalité résulte du simple changement de nom d'un indice muet ( $\nu \rightarrow \alpha$ ); la deuxième s'obtient en antisymétrisant par rapport aux indices  $\alpha$  et  $\beta$  le facteur de  $H^{\alpha\beta}$ ; la troisième utilise l'équation (14.2.21) puis l'antisymétrie de  $F$  pour remplacer

$$\partial_\alpha F_{\mu\beta} \rightarrow -\partial_\mu F_{\beta\alpha} - \partial_\beta F_{\alpha\mu} = \partial_\mu F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\mu\alpha}. \quad (14.8.100)$$

Il vient donc

$$-(\partial_\nu F_{\mu\beta}) H^{\nu\beta} + \frac{1}{4} (\partial_\mu F_{\alpha\beta}) H^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu F_{\alpha\beta}) H^{\alpha\beta} \quad (14.8.101)$$

qui termine ainsi la démonstration de (14.8.92). Dans le vide, (14.8.92) se réduit à

$$\partial_\nu T_\mu^\nu = -F_{\mu\nu} J^\nu = -F_\mu, \quad (14.8.102)$$

où  $F_\mu$  sont les composantes covariantes du vecteur puissance-force de Lorentz. Pour  $\mu = 0$ , (14.8.102) devient le bilan d'énergie

$$\partial_\nu T_0^\nu = -F_0 \leftrightarrow \frac{1}{c} [\partial_t w + \nabla \cdot \bar{S}_{e.m.}] = -\frac{1}{c} \bar{E} \cdot \bar{j}; \quad (14.8.103)$$

pour  $\mu = 1, 2, 3$ , (14.8.102) fournit le bilan d'impulsion

$$\partial_\nu T^{1\nu} = -F^1 \leftrightarrow \partial_t p_x^{e.m.} - \partial_k T^{1k} = -[\rho E_x + (\bar{j} \times \bar{B})_x]. \quad (14.8.104)$$

Il en va de même pour les deux autres composantes.

## Chapitre 15

# Mécanique relativiste du point matériel électrisé

### 15.1 Le vecteur vitesse

La trajectoire d'un point matériel de masse  $m \neq 0$  dans l'espace euclidien à 3 dimensions est une courbe  $C$  que l'observateur  $O$  décrit par des équations paramétriques

$$x^k = x^k(t), \quad k = 1, 2, 3. \quad (15.1.1)$$

La vitesse à l'instant  $t$  est le vecteur tangent à la courbe de composantes

$$w^k(t) = \frac{dx^k}{dt}, \quad |\bar{w}| < c. \quad (15.1.2)$$

Pour l'observateur  $O'$  en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse  $\bar{v} = v \bar{1}_x$  par rapport à  $O$ ,

$$ct = \gamma [ct' + \beta x'^1] \quad (15.1.3)$$

$$x^1 = \gamma [\beta ct' + x'^1] \quad (15.1.4)$$

$$x^2 = x'^2 \quad (15.1.5)$$

$$x^3 = x'^3, \quad (15.1.6)$$

la vitesse  $w'^k = \frac{dx'^k}{dt'}$ , est reliée à  $w^k$  par la loi de composition des vitesses

$$w^1 = \frac{w'^1 + v}{1 + \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}'}{c^2}} \quad (15.1.7)$$

$$w^2 = \frac{w'^2}{\gamma (1 + \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}'}{c^2})} \quad (15.1.8)$$

$$w^3 = \frac{w'^3}{\gamma (1 + \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}'}{c^2})}. \quad (15.1.9)$$

Ces formules indiquent clairement que les  $w^k$  ne sont pas des combinaisons linéaires des  $w'^k$  et qu'on ne peut donc pas en faire les composantes spatiales d'un vecteur

de l'espace-temps de Minkowski. Puisque les  $dx^k$  sont les composantes spatiales du vecteur  $dx^\mu$ , c'est le choix du paramètre  $t$  qui pose problème.

Au lieu de s'intéresser à la trajectoire  $C$  du point dans l'espace, on considèrera plutôt sa trajectoire  $\ell$  dans l'espace-temps, en repérant ses points à l'aide d'un paramètre invariant pour les changements de coordonnées du groupe  $L(4)$ ; un tel paramètre est naturellement fourni par  $s$ , la longueur minkowskienne de l'arc de courbe

$$s = \int_0^s \sqrt{ds^2} = c \int_0^t dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2} = c \int_0^t dt \sqrt{1 - \frac{\bar{w}^2}{c^2}} \quad (15.1.10)$$

mesurée à partir d'un point choisi comme origine. Remarquer que  $s$  est réel, car  $\bar{w}^2 < c^2$ . La trajectoire  $\ell$  est décrite par les 4 équations paramétriques

$$x^k = x^k(t(s)) = x^k(s), \quad t = t(s) \quad (15.1.11)$$

ou par

$$x^\mu = x^\mu(s). \quad (15.1.12)$$

Noter que,  $\forall s$ , le vecteur tangent

$$u^\mu(s) = \frac{dx^\mu}{ds} \quad (15.1.13)$$

est de type temps et que le carré de sa norme est égal à un

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \frac{ds^2}{ds^2} = 1. \quad (15.1.14)$$

Il est relié à la vitesse  $\bar{w}$  du point matériel dans l'espace euclidien par

$$w^k = \frac{dx^k}{dt} = \frac{dx^k}{ds} \frac{ds}{dt} = u^k c \sqrt{1 - \frac{\bar{w}^2}{c^2}} \quad (15.1.15)$$

ou

$$u^k = \frac{1}{c} \frac{w^k}{\sqrt{1 - \frac{\bar{w}^2}{c^2}}} = \frac{w^k}{c} \gamma_w. \quad (15.1.16)$$

Tandis que

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\bar{w}^2}{c^2}}} = \gamma_w. \quad (15.1.17)$$

Le quadri-vecteur  $\bar{u}$  est appelé vecteur vitesse, bien qu'il soit sans dimension.

## 15.2 Le vecteur énergie-impulsion

Pour trouver les équations du mouvement du point matériel relativiste, de charge électrique  $Q$ , dans un champ électromagnétique extérieur, partons du produit

$$\bar{f} dt = Q [\bar{E} + \bar{w} \times \bar{B}] dt = Q [\bar{E} dt + d\bar{x} \times \bar{B}] \quad (15.2.18)$$



de la force de Lorentz par  $dt$ , égal (par définition de l'impulsion de la particule), à l'accroissement  $d\bar{p}$  de l'impulsion dans l'intervalle de temps  $dt$ . En introduisant les notations tensorielles, (15.2.18) se réécrit

$$dp^k = f^k dt = Q F^{k\beta} dx_\beta, \quad (15.2.19)$$

qui sont les composantes spatiales du quadrivecteur

$$Q F^{\alpha\beta} dx_\beta. \quad (15.2.20)$$

Il en résulte que l'impulsion  $\bar{p}$  doit aussi former les composantes spatiales d'un vecteur d'espace-temps. Puisque le tri-vecteur  $\bar{p}$  doit être proportionnel à la vitesse  $\bar{w}$ , le seul vecteur qui remplit ces exigences est

$$p^\alpha = m c u^\alpha \quad (15.2.21)$$

soit

$$p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{\bar{w}^2}{c^2}}} \quad (15.2.22)$$

$$p^1 = \frac{m w^1}{\sqrt{1 - \frac{\bar{w}^2}{c^2}}} \quad (15.2.23)$$

$$p^2 = \frac{m w^2}{\sqrt{1 - \frac{\bar{w}^2}{c^2}}} \quad (15.2.24)$$

$$p^3 = \frac{m w^3}{\sqrt{1 - \frac{\bar{w}^2}{c^2}}}. \quad (15.2.25)$$

**Remarque 15.1.** On pourrait penser à une forme plus générale que (15.2.21), à savoir,  $p^\alpha = m c u^\alpha f(\bar{u}^2)$  mais, puisque  $\bar{u}^2 = 1$ ,  $f(\bar{u}^2)$  est une constante .

Lorsque  $\frac{\bar{w}^2}{c^2} \ll 1$ , on retrouve la relation non relativiste

$$\bar{p} \simeq m \bar{w}; \quad (15.2.26)$$

à cette même approximation,

$$c p^0 \simeq m c^2 + \frac{1}{2} m \bar{w}^2. \quad (15.2.27)$$

La différence

$$c p^0 - m c^2 \quad (15.2.28)$$

est donc l'énergie cinétique de la particule; elle diffère de son expression non relativiste par des termes  $o(\frac{\bar{w}^2}{c^2})$ . Noter aussi la relation

$$u^\alpha u_\alpha = 1 \quad \leftrightarrow \quad p^\alpha p_\alpha = m^2 c^2 \quad (15.2.29)$$

qui équivaut à

$$E = \sqrt{\bar{p}^2 c^2 + m^2 c^4}, \quad \text{avec} \quad E \geq m c^2. \quad (15.2.30)$$

### 15.2.1 Le photon

Le photon est une particule de masse  $m = 0$ ; il possède un vecteur énergie-impulsion de type lumière

$$p^\alpha p_\alpha = 0. \quad (15.2.31)$$

Les relations (15.2.22) à (15.2.25) gardent un sens à la limite  $m \rightarrow 0$  à la condition que  $w = |\bar{w}| \rightarrow c$ . On évite ces passages à la limite en "voyant" le photon comme une onde plane monochromatique dont le vecteur fréquence-nombre d'ondes

$$k^0 = \frac{\omega}{c}, \quad \bar{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \bar{n} \quad (15.2.32)$$

est proportionnel au vecteur énergie-impulsion du photon: l'énergie  $E = cp^0$  du photon est liée à la fréquence de l'onde par

$$E = h\nu = \hbar\omega, \quad \text{ou} \quad p^0 = \hbar k^0, \quad (15.2.33)$$

où  $h$  est la constante de Planck et  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ . Cette formule a été établie par Einstein en 1905 dans sa théorie de l'effet photoélectrique. Elle se complète par les relations

$$p^j = \hbar k^j \quad (15.2.34)$$

entre l'impulsion du photon et le vecteur nombre-d'ondes de l'onde associée. Ces dernières relations ont été confirmées par l'expérience (par exemple dans l'effet Compton).

### 15.3 Les équations de la mécanique relativiste

Une première forme différentielle de ces équations s'obtient en égalant à (15.2.20) l'accroissement  $dp^\alpha$  du vecteur énergie-impulsion

$$dp^\alpha = Q F^{\alpha\beta} dx_\beta. \quad (15.3.35)$$

A l'aide du paramètre  $s$ , elles s'écrivent

$$\frac{dp^\alpha}{ds} = Q F^{\alpha\beta} u_\beta \quad (15.3.36)$$

ou

$$m c \frac{du^\alpha}{ds} = Q F^{\alpha\beta} u_\beta. \quad (15.3.37)$$

Ces 4 équations ne sont pas indépendantes: en effet, la combinaison

$$m c u_\alpha \frac{du^\alpha}{ds} = Q u_\alpha F^{\alpha\beta} u_\beta \quad (15.3.38)$$

est une identité car

$$m c u_\alpha \frac{du^\alpha}{ds} = m c \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (u_\alpha u^\alpha) = 0 \quad (15.3.39)$$

et du fait de l'antisymétrie de  $F$ ,

$$Q u_\alpha F^{\alpha\beta} u_\beta = 0. \quad (15.3.40)$$

Pour  $F = 0$  ou  $Q = 0$ , les équations (15.3.37) se réduisent évidemment aux équations du mouvement de la particule libre.

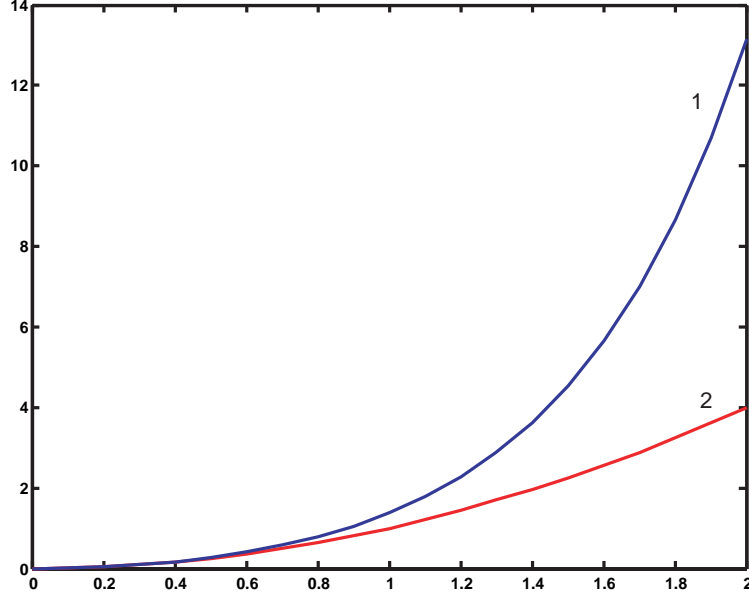


FIG. 15.1 – Trajectoires 1) relativiste  $x \simeq \sinh^2(y)$ , 2) non relativiste  $x \simeq y^2$

## 15.4 Trajectoire d'un électron dans un champ électrique

Considérons un électron de charge  $e$  dans un champ électrique extérieur  $\vec{E} = E \vec{1}_x$  uniforme et constant. En repassant au paramètre  $t$ , les équations du mouvement s'écrivent

$$m \frac{d}{dt} \frac{w_x}{\sqrt{1 - \frac{\bar{w}^2}{c^2}}} = e E \quad (15.4.41)$$

$$m \frac{d}{dt} \frac{w_y}{\sqrt{1 - \frac{\bar{w}^2}{c^2}}} = 0 \quad (15.4.42)$$

$$m \frac{d}{dt} \frac{w_z}{\sqrt{1 - \frac{\bar{w}^2}{c^2}}} = 0. \quad (15.4.43)$$

Avec comme conditions initiales,  $x(0) = y(0) = z(0) = 0$  et  $w_x(0) = w_z(0) = 0$ , ces équations s'intègrent directement pour donner

$$\frac{w_x}{\sqrt{1 - \frac{\bar{w}^2}{c^2}}} = \frac{e}{m} E t \quad (15.4.44)$$

$$\frac{w_y}{\sqrt{1 - \frac{\bar{w}^2}{c^2}}} = \frac{K}{m} = \frac{w_y(0)}{\sqrt{1 - \frac{w_y(0)^2}{c^2}}} \quad (15.4.45)$$

$$w_z = 0 \quad (15.4.46)$$

On en tire aisément  $\frac{\bar{w}^2}{c^2}$  puis

$$1 - \frac{\bar{w}^2}{c^2} = \frac{m^2 c^2}{m^2 c^2 + K^2 + e^2 E^2 t^2} \quad (15.4.47)$$

donc aussi

$$w_x = \frac{dx}{dt} = \frac{ecEt}{\sqrt{m^2c^2 + K^2 + e^2E^2t^2}} \quad (15.4.48)$$

$$w_y = \frac{dy}{dt} = \frac{cK}{\sqrt{m^2c^2 + K^2 + e^2E^2t^2}} \quad (15.4.49)$$

$$w_z = \frac{dz}{dt} = 0 \quad (15.4.50)$$

La trajectoire relativiste est donnée par

$$x(t) = \frac{c}{eE} [\sqrt{m^2c^2 + K^2 + e^2E^2t^2} - \sqrt{m^2c^2 + K^2}] \quad (15.4.51)$$

$$y(t) = \frac{cK}{eE} \sinh^{-1}\left(\frac{eEt}{\sqrt{m^2c^2 + K^2}}\right) \quad (15.4.52)$$

$$z(t) = 0. \quad (15.4.53)$$

Les équations non relativistes

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e}{m}Et, \quad \frac{dy}{dt} = w_y(0), \quad \frac{dz}{dt} = 0 \quad (15.4.54)$$

donnent, par contre

$$x(t) = \frac{e}{2m}Et^2, \quad y(t) = w_y(0)t, \quad z(t) = 0. \quad (15.4.55)$$

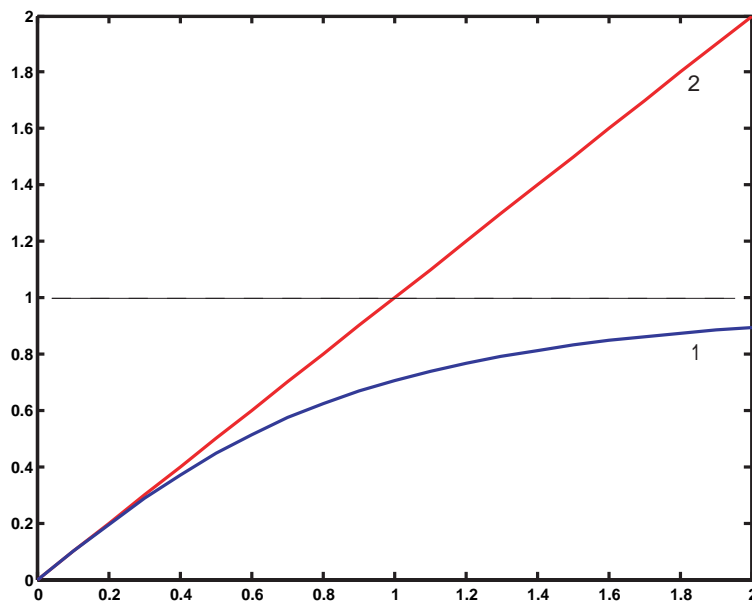


FIG. 15.2 – Vitesse  $w_x/c$ : 1) relativiste, 2) non relativiste.

## 15.5 Loi du choc des particules libres

En relativité galiléenne, cette loi exprime la conservation de l'impulsion totale du système de particules: la somme des impulsions avant le choc est égale à la somme des impulsions après le choc.

En relativité restreinte, la loi doit s'exprimer de façon covariante pour le groupe de Lorentz-Poincaré. Il y a donc conservation du vecteur énergie-impulsion totale

$$\sum_{i=1}^n p_i^\alpha = \sum_{j=1}^m p_j^\alpha. \quad (15.5.56)$$

Remarquer que le nombre  $n$  de particules avant le choc ne doit pas être égal au nombre  $m$  de particules après le choc.

Cette loi a d'importantes applications en physique nucléaire et en physique des particules élémentaires.

### 15.5.1 Désintégration du $\pi^0$ en deux photons

Pour l'observateur  $O$ , au repos par rapport au  $\pi^0$ , son vecteur énergie-impulsion n'a qu'une seule composante non nulle, à savoir

$$c p_\pi^0 = m_\pi c^2. \quad (15.5.57)$$

Pour  $O$ , les vecteurs énergie-impulsion des photons sont

$$p_1^\mu = (p_1^0 = \frac{E_1}{c}, \bar{p}_1) \quad (15.5.58)$$

$$p_2^\mu = (p_2^0 = \frac{E_2}{c}, \bar{p}_2) \quad (15.5.59)$$

La conservation de l'impulsion implique

$$0 = \bar{p}_1 + \bar{p}_2, \quad (15.5.60)$$

et la conservation de l'énergie fournit

$$m_\pi c^2 = c\sqrt{\bar{p}_1^2} + c\sqrt{\bar{p}_2^2} = 2c\sqrt{\bar{p}_1^2} = 2E_1, \quad (15.5.61)$$

puisque  $\bar{p}_2 = -\bar{p}_1$ .

### 15.5.2 La formule d'Einstein $E = m c^2$

Le cas traité ci-dessus n'est qu'un exemple d'application de la formule démontrée par Einstein en 1905. Sous la forme

$$\Delta M = \frac{\Delta E}{c^2} \quad (15.5.62)$$

elle exprime que la masse d'un corps est une mesure de son contenu énergétique; si ce corps émet, sous une forme quelconque, l'énergie  $\Delta E$ , sa masse diminue de  $\Delta M = \Delta E/c^2$ .

Considérons, par exemple, la désintégration d'un noyau instable de masse  $M$  en deux noyaux de masses égales,  $m$ , pour simplifier. Dans le système où  $M$  est immobile, la conservation de l'énergie et de l'impulsion donne

$$0 = \bar{p}_1 + \bar{p}_2$$

$$M c^2 = c\sqrt{\bar{p}_1^2 + m^2 c^2} + c\sqrt{\bar{p}_2^2 + m^2 c^2} \quad (15.5.63)$$

$$= 2 c\sqrt{\bar{p}_1^2 + m^2 c^2} \quad (15.5.64)$$

$$= \frac{2mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\bar{w}^2}{c^2}}}. \quad (15.5.65)$$

La désintégration ne peut avoir lieu que si  $M \geq 2m$ . Dans ce processus, la différence de masse,  $\Delta M = M - 2m$ , s'est ici transformée en énergie cinétique portée par les noyaux finals:

$$\Delta M = 2m \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\bar{w}^2}{c^2}}} - 1 \right] \simeq 2 \frac{1}{c^2} \frac{1}{2} m \bar{w}^2. \quad (15.5.66)$$

Le phénomène inverse existe aussi: dans des chocs de particules, une partie de l'énergie cinétique des particules entrantes peut être utilisée pour créer de nouvelles particules. Par exemple: pour des électrons, positons suffisamment énergétiques, le processus

$$e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-, \quad (15.5.67)$$

peut se produire, alors que  $m_\mu c^2 = 105$  MeV et  $m_e c^2 = 0.5$  MeV.

### 15.5.3 L'effet Compton ou $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$

On étudie ici la diffusion élastique d'un photon par un électron libre. Dans le système de repos de l'électron initial:

$$\bar{p}_\gamma = \bar{p}_e + \bar{q}_\gamma \quad (15.5.68)$$

$$m_e c^2 + c\sqrt{\bar{p}_\gamma^2} = c\sqrt{\bar{p}_e^2 + m_e^2 c^2} + c\sqrt{\bar{q}_\gamma^2}. \quad (15.5.69)$$

où  $\bar{p}_\gamma$  est l'impulsion du photon initial,  $\bar{p}_e$  et  $\bar{q}_\gamma$  sont respectivement les impulsions de l'électron et du photon après le choc. Avec  $c|\bar{p}_\gamma| = h\nu$  et  $c|\bar{q}_\gamma| = h\nu'$ , ces équations sont équivalentes à

$$\bar{p}_e = \bar{p}_\gamma - \bar{q}_\gamma \quad (15.5.70)$$

$$m_e c^2 + h(\nu - \nu') = c\sqrt{\bar{p}_e^2 + m_e^2 c^2}. \quad (15.5.71)$$

En élevant ces équations au carré, on obtient

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)} \quad (15.5.72)$$

où  $\theta$  est l'angle entre l'impulsion du photon final et l'impulsion du photon initial:

$$\bar{p}_\gamma \cdot \bar{q}_\gamma = |\bar{p}_\gamma| |\bar{q}_\gamma| \cos \theta. \quad (15.5.73)$$

Dans les conditions où  $\frac{h\nu}{m_e c^2} \ll 1$ , (15.5.72) se réduit à

$$\frac{\nu' - \nu}{\nu} = \frac{h\nu}{m_e c^2} (1 - \cos \theta). \quad (15.5.74)$$

## Chapitre 16

# Rayonnement émis par des charges accélérées

### 16.1 Potentiels retardés et avancés: Fonctions de Green invariantes

Dans le vide, le champ électromagnétique  $F$  produit par la source  $J$  satisfait les équations de Maxwell

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 J^\beta. \quad (16.1.1)$$

En termes du potentiel, ces équations deviennent

$$\square A^\beta - \partial^\beta (\partial_\alpha A^\alpha) = \mu_0 J^\beta \quad (16.1.2)$$

qui se réduisent à

$$\square A^\beta = \mu_0 J^\beta \quad (16.1.3)$$

si le potentiel vérifie la condition de Lorentz

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0. \quad (16.1.4)$$

A l'aide de la fonction de Green retardée  $\mathcal{G}_{ret}(x, x')$  ( resp. avancée  $\mathcal{G}_{av}(x, x')$ ) solution de

$$\square_x \mathcal{G}_{ret(av)}(x, x') = 4\pi \delta^4(x - x'), \quad (16.1.5)$$

où

$$\delta^4(x - x') = \delta(x^0 - x'^0) \delta^3(\bar{x} - \bar{x}') = \frac{1}{c} \delta(t - t') \delta^3(\bar{x} - \bar{x}') \quad (16.1.6)$$

la solution retardée (resp. avancée) de l'équation d'ondes inhomogènes s'écrit

$$A_{ret}^\alpha(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^4x' \mathcal{G}_{ret}(x, x') J^\alpha(x') \quad (16.1.7)$$

$$A_{av}^\alpha(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^4x' \mathcal{G}_{av}(x, x') J^\alpha(x'). \quad (16.1.8)$$

Ces fonctions de Green ont déjà été utilisées au chapitre 8; elles sont données explicitement par

$$\mathcal{G}_{ret}(x, x') = \delta(x^0 - x'^0 - |\bar{x} - \bar{x}'|) \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \quad (16.1.9)$$

$$\mathcal{G}_{av}(x, x') = \delta(x'^0 - x^0 - |\bar{x} - \bar{x}'|) \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|}. \quad (16.1.10)$$

Ces fonctions de Green peuvent être réécrites sous une forme explicitement invariante pour les transformations de  $L^\uparrow = \{\Lambda \in L, \Lambda^0_0 \geq 1\}$  en utilisant l'identité suivante entre distributions

$$\delta[(x - x')^2] = \delta[(x^0 - x'^0)^2 - |\bar{x} - \bar{x}'|^2] \quad (16.1.11)$$

$$= \delta[(x^0 - x'^0 - |\bar{x} - \bar{x}'|)(x^0 - x'^0 + |\bar{x} - \bar{x}'|)] \quad (16.1.12)$$

$$= \frac{1}{2|\bar{x} - \bar{x}'|} [\delta(x^0 - x'^0 - |\bar{x} - \bar{x}'|) + \delta(x^0 - x'^0 + |\bar{x} - \bar{x}'|)]. \quad (16.1.13)$$

On en tire

$$\mathcal{G}_{ret}(x, x') = 2 \Theta(x^0 - x'^0) \delta[(x - x')^2] \quad (16.1.14)$$

$$\mathcal{G}_{av}(x, x') = 2 \Theta(x'^0 - x^0) \delta[(x - x')^2]. \quad (16.1.15)$$

$\Theta$  est la fonction de Heaviside, égale à 1 lorsque son argument est positif, nulle lorsque son argument est négatif. La quantité  $(x - x')^2$ , égale au carré de la norme du vecteur  $(x^\mu - x'^\mu)$  est invariante pour tout le groupe de Lorentz-Poincaré; sa présence dans l'argument de  $\delta$  dont le support est réduit au point 0 indique que seule la valeur  $(x - x')^2 = 0$  fournit une contribution non nulle à (16.1.14) et (16.1.15). Le vecteur  $(x^\mu - x'^\mu)$  est donc de type lumière et on sait que  $L^\uparrow$  conserve le signe de sa composante temporelle qui est l'argument de  $\Theta$ . Les deux fonctions de Green sont donc bien invariantes pour  $L^\uparrow$ .

## 16.2 Vecteur densité-courant d'une charge en mouvement

Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéresserons au champ é.m. produit par une particule chargée en mouvement.

Si cette particule est une charge ponctuelle  $e$  en  $\bar{x}(t)$  dans l'espace euclidien à 3 dimensions, ses densités de charges et de courants sont données par

$$c \rho(\bar{x}, t) = e c \delta^3(\bar{x} - \bar{x}(t)) \quad (16.2.16)$$

$$\vec{j}(\bar{x}, t) = \rho(\bar{x}, t) \vec{w}(t) = e \vec{w}(t) \delta^3(\bar{x} - \bar{x}(t)), \quad (16.2.17)$$

avec  $\vec{w}(t) = \frac{d\bar{x}(t)}{dt}$ .

En fonction des coordonnées  $x^\mu(s)$  d'un point de la trajectoire  $\ell$  dans l'espace-temps, ces densités se regroupent en le vecteur densité-courant qui peut aussi se mettre sous la forme

$$J^\alpha(x) = e c \int_{-\infty}^{\infty} ds u^\alpha(s) \delta^4(x^\mu - x^\mu(s)), \quad (16.2.18)$$



où  $u^\alpha(s) = \frac{dx^\alpha(s)}{ds}$  est le vecteur vitesse. L'égalité entre ces expressions s'établit le plus simplement en remplaçant la variable d'intégration  $s$  dans (16.2.18) par la variable  $x^0(s)$

$$J^\alpha(x) = J^\alpha(\bar{x}, ct) \quad (16.2.19)$$

$$= e c \int_{-\infty}^{\infty} dx^0(s) \frac{ds}{dx^0(s)} u^\alpha(s) \delta^3(\bar{x} - \bar{x}(s)) \delta(x^0 - x^0(s)) \quad (16.2.20)$$

$$= e c \left[ \frac{ds}{dx^0(s)} \frac{dx^\alpha(s)}{ds} \right] \delta^3(\bar{x} - \bar{x}(s)) \Big|_{x^0(s)=x^0} \quad (16.2.21)$$

$$= e c \frac{dx^\alpha(s)}{dx^0(s)} \delta^3(\bar{x} - \bar{x}(s)) \Big|_{x^0(s)=x^0=ct}. \quad (16.2.22)$$

A  $x^0$  ou  $t$  fixé, l'équation

$$x^0(s) = x^0 \quad \text{ou} \quad x^0(s) = ct \quad (16.2.23)$$

sélectionne une valeur de  $s$ , à savoir  $s(t)$  pour laquelle

$$\bar{x}(s(t)) = \bar{x}(t) \quad (16.2.24)$$

$$\frac{dx^\alpha(s)}{dx^0(s)} \Big|_{s=s(t)} = \frac{1}{c} \frac{dx^\alpha(t)}{dt}. \quad (16.2.25)$$

Pour  $\alpha = 0$ ,  $\frac{dx^0(t)}{dt} = c$ , pour  $\alpha = k = 1, 2, 3$ ,  $\frac{dx^k(t)}{dt} = w^k(t)$ . CQFD

### 16.3 Potentiels de Liénard-Wiechert

Le potentiel retardé produit par une charge en mouvement se met donc sous la forme

$$A_{ret}^\alpha(x) = \frac{2e\mu_0 c}{4\pi} \int d^4x' \Theta(x^0 - x'^0) \delta[(x - x')^2] \int_{-\infty}^{\infty} ds u^\alpha(s) \delta^4(x'^\mu - x^\mu(s)). \quad (16.3.26)$$

En permutant l'ordre des intégrations, l'intégrale sur le volume d'espace-temps devient immédiate grâce à la présence du  $\delta^4$ , et il reste

$$A_{ret}^\alpha(x) = \frac{2e\mu_0 c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds u^\alpha(s) \Theta(x^0 - x^0(s)) \delta[(x - x(s))^2]. \quad (16.3.27)$$

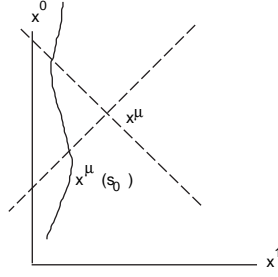
Sous cette forme, on voit explicitement que la seule contribution au potentiel, en  $x$ , provient de la charge située au point  $x(s_0)$ , à l'intersection de la trajectoire  $x(s)$  et du demi-cône passé du point  $x$ .

Pour évaluer (16.3.27), on utilise l'égalité suivante entre distributions, valable pour une fonction  $f$  qui ne possède que des zéros simples,

$$\delta[f(x)] = \sum_i \delta(x - x_i) \frac{1}{\left| \left( \frac{df}{dx} \right)_{x=x_i} \right|} \quad (16.3.28)$$

où les  $x_i$  sont les zéros de la fonction  $f$ . Nous avons besoin de

$$\frac{d}{ds} [(x - x(s))^2] = -2 [x^\mu - x^\mu(s)] u_\mu(s) \quad (16.3.29)$$



évalué en  $s = s_0$  tel que  $(x - x(s_0))^2 = 0$  et  $x^0 > x^0(s_0)$ . Le potentiel s'écrit donc comme

$$A_{ret}^\alpha(x) = \frac{e\mu_0 c}{4\pi} \left[ \frac{u^\alpha(s)}{[x^\mu - x^\mu(s)] u_\mu(s)} \right]_{s=s_0}. \quad (16.3.30)$$

Ce potentiel est connu sous le nom de potentiel de LIENARD-WIECHERT. On le trouve souvent écrit sous une forme plus familière mais non manifestement covariante: notons d'abord que la définition même de  $s_0$  implique que

$$x^0 - x^0(s_0) = |\bar{x} - \bar{x}(s_0)| = R_{t_0}. \quad (16.3.31)$$

Il vient donc

$$[x^\mu - x^\mu(s)] u_\mu(s) = [x^0 - x^0(s_0)] u_0(s_0) - [\bar{x} - \bar{x}(s_0)] \cdot \bar{u}(s_0) \quad (16.3.32)$$

$$= \gamma R_{t_0} - \frac{1}{c} \gamma \bar{w} \cdot \bar{n} R_{t_0} \quad (16.3.33)$$

$$= \gamma R_{t_0} (1 - \bar{\beta} \cdot \bar{n}) \quad (16.3.34)$$

où  $\bar{n}$  est le vecteur unité dans la direction de  $\bar{x} - \bar{x}(s_0)$  et  $\bar{\beta} = \frac{\bar{w}}{c}$ , évalué au temps retardé  $ct_0 = ct - R_{t_0}$ . Le potentiel de Liénard-Wiechert se réécrit donc comme

$$\phi_{ret}(\bar{x}, t) = c A^0(\bar{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{e}{(1 - \bar{\beta} \cdot \bar{n}) R} \right]_{ret} \quad (16.3.35)$$

$$\bar{A}_{ret}(\bar{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{e \bar{w}}{(1 - \bar{\beta} \cdot \bar{n}) R} \right]_{ret}. \quad (16.3.36)$$

## 16.4 Champ électromagnétique d'une charge mobile

Le champ électromagnétique retardé  $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$  (nous omettons l'indice "ret" pour alléger les notations) peut être calculé directement en dérivant les potentiels de L-W; il est cependant plus simple de le faire à partir de l'expression covariante du potentiel:

$$\partial_\alpha A_\beta = \partial_\alpha \frac{2e\mu_0 c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds u_\beta(s) \Theta(x^0 - x^0(s)) \delta[(x - x(s))^2]. \quad (16.4.37)$$

Sous l'intégrale (16.4.37), deux facteurs dépendent des coordonnées  $x^\alpha$ , à savoir  $\Theta$  et  $\delta$ ; or

$$\partial_\alpha \Theta(x^0 - x^0(s)) = \delta_\alpha^0 \delta(x^0 - x^0(s)), \quad (16.4.38)$$

et le produit

$$\delta(x^0 - x^0(s)) \delta[(x - x(s))^2] = \delta(x^0 - x^0(s)) \delta[-(\bar{x} - \bar{x}(s))^2] \quad (16.4.39)$$

ne peut apporter de contribution à l'intégrale que pour  $x^0 - x^0(s) = 0 = R$ . Pour tout  $R \neq 0$  (ce qui nous importe ici puisque nous avons en vue de calculer du rayonnement) on peut donc oublier ce terme et calculer (16.4.37) en ne dérivant que le facteur  $\delta$  sous l'intégrale

$$\partial_\alpha A_\beta = \frac{2e\mu_0 c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds u_\beta(s) \Theta(x^0 - x^0(s)) \partial_\alpha \delta[(x - x(s))^2]. \quad (16.4.40)$$

Le gradient de  $\delta$  se calcule comme

$$\partial_\alpha \delta[f(s)] = \frac{\partial}{\partial f} \delta[f] \partial_\alpha f = \partial_\alpha f \frac{ds}{df} \frac{d}{ds} \delta[f] \quad (16.4.41)$$

pour  $f = (x - x(s))^2$ ; il vient donc

$$\partial_\alpha \delta[f(s)] = - \frac{(x_\alpha - x_\alpha(s))}{u_\mu(s) (x^\mu - x^\mu(s))} \frac{d}{ds} \delta[f] \quad (16.4.42)$$

En insérant ceci dans (16.4.37), puis en intégrant par parties et en négligeant toujours les dérivées de  $\Theta$ , il reste

$$\partial_\alpha A_\beta(x) = \frac{2e\mu_0 c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{d}{ds} \left[ \frac{u_\beta(s) (x_\alpha - x_\alpha(s))}{u_\mu(s) (x^\mu - x^\mu(s))} \right] \Theta(x^0 - x^0(s)) \delta[(x - x(s))^2]. \quad (16.4.43)$$

Cette intégrale a la même forme que (16.3.27) avec  $u^\alpha(s)$  remplacé par  $\frac{d}{ds}[\dots]$ ; le résultat se déduit donc directement de (16.3.30) par la même substitution: il vient donc, pour  $\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ ,

$$F^{\alpha\beta}(x) = \frac{e\mu_0 c}{4\pi} \frac{1}{[x^\mu - x^\mu(s)] u_\mu(s)} \quad (16.4.44)$$

$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{u^\beta(s) (x^\alpha - x^\alpha(s)) - u^\alpha(s) (x^\beta - x^\beta(s))}{u_\nu(s) [x^\nu - x^\nu(s)]} \right]_{s=s_0}. \quad (16.4.45)$$

Sous cette forme, le champ électromagnétique est manifestement covariant, mais pas très explicite. Il est utile d'en extraire les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  en fonction de la vitesse et de l'accélération de la particule. Pour cela, rappelons que

$$x^0 - x^0(s_0) = R_{t_0} \quad , \quad \bar{x} - \bar{x}(s_0) = \bar{n} R_{t_0} \quad (16.4.46)$$

$$u^0(s_0) = \gamma|_{t_0} \quad , \quad \bar{u}(s_0) = \gamma \bar{\beta}|_{t_0} \quad (16.4.47)$$

$$\frac{du^0}{ds} \Big|_{s_0} = \frac{\gamma}{c} \frac{d\gamma}{dt} \Big|_{t_0} = \frac{1}{c} \gamma^4 \bar{\beta} \cdot \dot{\bar{\beta}} \Big|_{t_0} \quad (16.4.48)$$

$$\frac{du^k}{ds} \Big|_{s_0} = \frac{1}{c} [\gamma^2 \dot{\beta}^k + \gamma^4 \beta^k (\bar{\beta} \cdot \dot{\bar{\beta}})] \Big|_{t_0} \quad (16.4.49)$$

$$\frac{d}{ds} [u_\mu (x^\mu - x^\mu(s))] = -1 + (x^\mu - x^\mu(s)) \frac{du_\mu}{ds}. \quad (16.4.50)$$

Dans la dernière ligne, on a utilisé  $u_\mu(s) \frac{dx^\mu(s)}{ds} = u_\mu(s) u^\mu(s) = 1$ . On en tire

$$\vec{B}(\bar{x}, t) = \frac{1}{c} [\bar{n} \times \vec{E}] \quad (16.4.51)$$

et

$$\bar{E}(\bar{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\bar{n} - \bar{\beta}}{\gamma^2(1 - \bar{\beta} \cdot \bar{n})^3 R^2} + \frac{1}{c} \frac{\bar{n} \times ((\bar{n} - \bar{\beta}) \times \dot{\bar{\beta}})}{(1 - \bar{\beta} \cdot \bar{n})^3 R} \right]_{ret}. \quad (16.4.52)$$

$\bar{E}$  et  $\bar{B}$  apparaissent naturellement comme la somme de deux termes: le premier qui ne dépend que de  $\bar{\beta}$  et qui décroît comme  $R^{-2}$ , le second qui décroît comme  $R^{-1}$  et est linéaire en l'accélération  $\dot{\bar{\beta}}$  de la particule; c'est ce dernier terme qui fournit les "champs de rayonnement".

Si  $\beta$  est constant, les champs de rayonnement sont évidemment nuls.

## 16.5 Puissance rayonnée par une charge accélérée

Si la charge accélérée est observée dans un référentiel où sa vitesse  $\beta \ll 1$ , le champ électrique de rayonnement se réduit à

$$\bar{E}_{rad}(\bar{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \left[ \frac{\bar{n} \times (\bar{n} \times \dot{\bar{\beta}})}{R} \right]_{ret}. \quad (16.5.53)$$

Le courant d'énergie à l'instant  $t$  est donné par le vecteur de Poynting

$$\bar{S} = \frac{1}{\mu_0} [\bar{E} \times \bar{B}]_{rad} = \frac{1}{\mu_0 c} \bar{E}_{rad}^2 \bar{n}; \quad (16.5.54)$$

et la puissance rayonnée, égale au flux du vecteur de Poynting au travers de la surface  $S_\infty$ , est donnée par

$$\mathcal{P} = \int_{S_\infty} \bar{dS} \cdot \bar{S} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^3} |\dot{\bar{w}}|^2. \quad (16.5.55)$$

Cette formule est due à LARMOR: elle donne la puissance instantanée rayonnée par une particule accélérée, mais non relativiste.

On peut démontrer que  $\mathcal{P}$  est invariant pour le groupe de Lorentz. Dès lors, au lieu de faire explicitement le calcul relativiste de la puissance rayonnée, on peut essayer de construire un invariant qui se réduit à la formule de Larmor pour  $\beta \ll 1$ . Il y en a beaucoup, mais un seul n'est fonction que de  $\bar{\beta}$  et  $\dot{\bar{\beta}}$ ; c'est

$$\mathcal{P} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^3} c^4 \left( - \frac{du_\mu}{ds} \frac{du^\mu}{ds} \right) \quad (16.5.56)$$

$$= \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^3} c^2 \gamma^2 \left( - \frac{du_\mu}{dt} \frac{du^\mu}{dt} \right). \quad (16.5.57)$$

Avec  $u^0 = \gamma$  et  $\bar{u} = \gamma \bar{\beta}$ , et  $(u^0)^2 - (\bar{u})^2 = 1$ , on a

$$\frac{du^0}{dt} = \gamma^3 \bar{\beta} \cdot \dot{\bar{\beta}} \quad (16.5.58)$$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \gamma^3 (\bar{\beta} \cdot \dot{\bar{\beta}}) \bar{\beta} + \gamma \dot{\bar{\beta}} \quad (16.5.59)$$

et

$$- \left( \frac{du^0}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\bar{u}}{dt} \right)^2 = - \beta^2 \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\bar{u}}{dt} \right)^2 = \gamma^4 (\dot{\bar{\beta}}^2 - (\bar{\beta} \times \dot{\bar{\beta}})^2). \quad (16.5.60)$$

On en tire

$$\mathcal{P} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \gamma^6 [(\dot{\vec{\beta}})^2 - (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2]. \quad (16.5.61)$$

Cette formule relativiste est due à LIENARD, elle est d'application courante dans le cadre des accélérateurs de particules chargées. En terme du vecteur énergie-impulsion de la particule,  $p^\mu = mcu^\mu$ , (16.5.57) se récrit comme

$$\mathcal{P} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^2 c} \left( -\frac{dp_\mu}{ds} \frac{dp^\mu}{ds} \right) \quad (16.5.62)$$

$$= \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^2 c} \left[ \left( \frac{d\vec{p}}{ds} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{dE}{ds} \right)^2 \right] \quad (16.5.63)$$

$$= \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^2 c} \left[ \left( \frac{d\vec{p}}{ds} \right)^2 - \beta^2 \left( \frac{dp}{ds} \right)^2 \right]. \quad (16.5.64)$$

Pour une force extérieure fixée, c'est-à-dire, pour  $\frac{d\vec{p}}{ds}$  fixé,  $\mathcal{P}$  dépend de l'inverse du carré de la masse de la particule; l'énergie rayonnée est donc plus importante pour les particules plus légères, càd pour les électrons.

### 16.5.1 Accélérateur linéaire

Dans un accélérateur linéaire la particule se meut sur une droite,  $\dot{\vec{\beta}} \parallel \vec{\beta}$ . Dans ce cas, (16.5.64) se réduit à

$$\mathcal{P} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^2 c} (1 - \beta^2) \left( \frac{dp}{ds} \right)^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^2 c^3} \left( \frac{dp}{dt} \right)^2. \quad (16.5.65)$$

Or,

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (16.5.66)$$

d'où

$$\frac{dE}{dt} = \frac{p}{E} c^2 \frac{dp}{dt} = w \frac{dp}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dp}{dt} \quad (16.5.67)$$

et

$$\frac{dE}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dE}{dx} = \frac{dp}{dt} \quad (16.5.68)$$

et aussi

$$\mathcal{P} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^2 c^3} \left( \frac{dp}{dt} \right)^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^2 c^3} \left( \frac{dE}{dx} \right)^2. \quad (16.5.69)$$

La puissance rayonnée ne dépend que de la force extérieure qui détermine la variation de l'énergie de la particule en fonction de la distance;  $\mathcal{P}$  ne dépend ni de l'énergie de la particule ni de son impulsion. Le rapport entre la puissance rayonnée et la puissance fournie par les sources externes est

$$\frac{\mathcal{P}}{(dE/dt)} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^2 c^3} \frac{1}{w} \frac{dE}{dx} \xrightarrow{(\beta \rightarrow 1)} \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} \frac{1}{m c^2} \frac{dE}{dx}. \quad (16.5.70)$$

Pour un électron,  $m_e c^2 = 0.5 MeV$  et

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 2.8 \times 10^{-15} m \quad (16.5.71)$$

et l'ordre de grandeur du gain en énergie au SLAC, par exemple, est de  $35 MeV/m$ . La perte d'énergie par rayonnement est donc tout à fait négligeable pour les électrons donc aussi pour des particules plus lourdes.

### 16.5.2 Accélérateur circulaire

Ici, la situation est très différente:  $\dot{\vec{\beta}} \perp \vec{\beta}$  et  $|\dot{\vec{\beta}}| = \omega |\vec{\beta}|$ , avec  $\omega = (c\beta/\rho)$  où  $\rho$  est le rayon de l'orbite. Dans ce type de machines, l'impulsion  $\vec{p}$  change rapidement en direction lorsque la particule tourne, mais la variation de l'énergie par tour est petite, en fait

$$\left| \frac{d\vec{p}}{ds} \right| = \gamma \frac{\omega}{c} |\vec{p}| \gg \frac{1}{c} \left| \frac{dE}{ds} \right|. \quad (16.5.72)$$

Dans ce cas, (16.5.64) devient approximativement

$$\mathcal{P} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^2 c^3} \gamma^2 \omega^2 |\vec{p}|^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho^2} \gamma^4 \beta^4. \quad (16.5.73)$$

L'énergie rayonnée par tour est

$$\delta E = \frac{2\pi}{\omega} \mathcal{P} = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \gamma^4 \beta^3 \quad (16.5.74)$$

$$= \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \left[ \frac{E}{mc^2} \right]^4 \beta^3 \quad (16.5.75)$$

Pour  $\beta \rightarrow 1$ ,

$$\delta E \rightarrow \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \left[ \frac{E}{mc^2} \right]^4. \quad (16.5.76)$$

Dans les premiers synchrotrons à électrons,  $\rho \simeq 1 \text{ m}$ ,  $E_{max} \simeq 0.3 \text{ GeV} = 3 \times 10^2 \text{ MeV}$ ,  $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 1.4 \times 10^{-15} \text{ MeV m}$  et

$$\delta E_{max} \simeq 7.6 \times 10^{-4} \text{ MeV} = 0.76 \text{ keV}. \quad (16.5.77)$$

Ceci était heureusement inférieur au gain d'énergie de quelques keV par tour, mais déjà non négligeable. Au CERN, où l'énergie maximale des électrons est actuellement de  $100 \text{ GeV} = 10^5 \text{ MeV}$  et le rayon  $\rho = 4.25 \times 10^3 \text{ m}$ ,  $\delta E_{max} \simeq 2.3 \text{ GeV}$ .

# Annexe A

## Quelques outils mathématiques

### A.1 Rappels d'algèbre linéaire

#### A.1.1 Espace vectoriel $V$ sur $\mathbb{R}$

**Définition A.1.** *l'ensemble  $V$  d'éléments  $\{\bar{u}, \bar{v}, \dots\}$  est un espace vectoriel si  $V$  est un groupe additif muni d'une multiplication par des scalaires  $\{a, b, \dots \in \mathbb{R}\}$ :*

$$a \bar{v} = \bar{v} a \in \mathbb{R}, \quad 1 \bar{v} = \bar{v}, \quad 0 \bar{v} = 0 \quad (\text{A.1.1})$$

$$a (\bar{u} + \bar{v}) = a \bar{u} + a \bar{v} \quad (\text{A.1.2})$$

$$(a + b) \bar{v} = a \bar{v} + b \bar{v}. \quad (\text{A.1.3})$$

Les vecteurs  $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\}$  sont linéairement indépendants si

$$a_1 \bar{v}_1 + a_2 \bar{v}_2 + \dots + a_k \bar{v}_k = 0 \rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0. \quad (\text{A.1.4})$$

La dimension de  $V$  est égale au nombre maximal  $n$  de vecteurs linéairement indépendants de  $V$ . On appelle *base* tout ensemble de  $n$  vecteurs linéairement indépendants; soit, par exemple l'ensemble  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ . Tout vecteur  $\bar{v}$  de  $V$  s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs d'une base

$$\bar{v} = \bar{e}_1 v^1 + \bar{e}_2 v^2 + \dots + \bar{e}_n v^n = \bar{e}_j v^j. \quad (\text{A.1.5})$$

Les nombres réels  $v^j$  sont les *composantes contravariantes* du vecteur  $\bar{v}$ . Soit une deuxième base de  $V$  formée des vecteurs  $\{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \dots, \bar{e}'_n\}$  qui s'expriment dans la première par les combinaisons linéaires

$$\bar{e}'_k = \bar{e}_j B^j_k, \quad \det B \neq 0. \quad (\text{A.1.6})$$

Les composantes contravariantes de  $\bar{v}$  dans les deux bases sont liées par

$$\bar{v} = \bar{e}_j v^j = \bar{e}'_k v'^k = \bar{e}_j B^j_k v'^k \quad (\text{A.1.7})$$

soit

$$v^j = B^j_k v'^k. \quad (\text{A.1.8})$$

### A.1.2 Espace dual $V^*$

**Définition A.2.**  $V^*$  est l'espace des formes linéaires sur  $V$ , c'est-à-dire, des applications linéaires de  $V$  dans  $\mathbb{R}$ .

Les éléments de  $V^*$  sont notés  $\{\underline{u}, \underline{v}, \dots\}$ :

$$\underline{u}(\bar{v}) \in \mathbb{R} \quad (\text{A.1.9})$$

$$\underline{u}(a\bar{v} + b\bar{w}) = a\underline{u}(\bar{v}) + b\underline{u}(\bar{w}). \quad (\text{A.1.10})$$

Si  $\bar{v} = \bar{e}_j v^j$ ,

$$\underline{u}(\bar{v}) = \underline{u}(\bar{e}_j v^j) = u_j v^j. \quad (\text{A.1.11})$$

L'action de la forme linéaire  $\underline{u}$  sur un vecteur est donc entièrement définie par son action sur les vecteurs d'une base, soit par les  $n$  nombres réels  $u_j = \underline{u}(\bar{e}_j)$ . Avec

$$(a\underline{u})(\bar{v}) = a\underline{u}(\bar{v}) \quad (\text{A.1.12})$$

$$(a\underline{u}^1 + b\underline{u}^2)(\bar{v}) = a\underline{u}^1(\bar{v}) + b\underline{u}^2(\bar{v}), \quad (\text{A.1.13})$$

$V^*$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de même dimension  $n$  que  $V$  (pour  $n$  fini); les formes linéaires sont aussi appelées *covecteurs*.

A la base  $\{\bar{e}_j\}$ , est associée, dans  $V^*$ , la *base duale*  $\{\underline{e}^1, \underline{e}^2, \dots, \underline{e}^n\}$  définie par

$$\underline{e}^j(\bar{e}_k) = \delta_k^j = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k. \end{cases} \quad (\text{A.1.14})$$

Les nombres réels  $u_j = \underline{u}(\bar{e}_j)$  sont les composantes du covecteur  $\underline{u}$  dans la base duale; en effet, si on pose  $\underline{u} = \tilde{u}_k \underline{e}^k$ , il vient

$$u_j = \underline{u}(\bar{e}_j) = \tilde{u}_k \underline{e}^k(\bar{e}_j) = \tilde{u}_k \delta_j^k = \tilde{u}_j. \quad (\text{A.1.15})$$

Si les bases  $\{\bar{e}_j\}$  et  $\{\bar{e}'_j\}$  sont reliées par (A.1.6), on vérifie aisément que leurs bases duales respectives sont reliées par

$$\underline{e}^k = B^k_j \underline{e}'^j. \quad (\text{A.1.16})$$

et que les composantes du covecteur  $\underline{u}$  dans ces bases duales sont reliées par

$$u'_j = u_k B^k_j. \quad (\text{A.1.17})$$

### A.1.3 Tenseurs

**Définition A.3.** Un tenseur  $T$  de type  $\binom{p}{q}$  est une application multilinéaire

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_p \times \underbrace{V \times \dots \times V}_q \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.1.18})$$

$$(\underline{u}^1, \dots, \underline{u}^p, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q) \mapsto T(\underline{u}^1, \dots, \underline{u}^p, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q) \in \mathbb{R} \quad (\text{A.1.19})$$

linéaire en chacune des variables.



Par définition, les tenseurs  $\binom{0}{0}$  sont les scalaires de  $\mathbb{R}$ .

Les tenseurs de type  $\binom{0}{1}$  sont les covecteurs, éléments de  $V^*$ .

Les tenseurs de type  $\binom{1}{0}$  sont les éléments de  $V^{**}$ ; on peut cependant montrer que  $V^{**}$  est isomorphe à  $V$ , c'est pourquoi on identifie le vecteur  $\bar{v}$  avec le tenseur  $\binom{1}{0}$  dont l'action sur un covecteur  $\underline{u}$  est définie par la relation de dualité

$$\bar{v}(\underline{u}) = \underline{u}(\bar{v}). \quad (\text{A.1.20})$$

Le tenseur  $T$  de type  $\binom{p}{q}$  est entièrement défini comme application multilinéaire si son action est définie sur les vecteurs et covecteurs d'une base et de la base duale, soit par les nombres

$$T^{k_1 \dots k_p}_{j_1 \dots j_q} = T(\underline{e}^{k_1}, \dots, \underline{e}^{k_p}, \bar{e}_{j_1}, \dots, \bar{e}_{j_q}), \quad (\text{A.1.21})$$

qui sont les *composantes du tenseur* dans la base "e". Ses composantes dans la base "e'" sont reliées aux précédentes par les relations linéaires homogènes suivantes

$$T'^{k_1 \dots k_p}_{j_1 \dots j_q} = T^{\ell_1 \dots \ell_p}_{i_1 \dots i_q} B^{i_1}_{j_1} \dots B^{j_q}_{i_q} B^{-1}_{\ell_1}{}^{k_1} \dots B^{-1}_{\ell_p}{}^{k_p}. \quad (\text{A.1.22})$$

Avec les définitions habituelles de la somme de deux tenseurs de même type et de leur multiplication par des réels, on voit aisément que les tenseurs  $\binom{p}{q}$  forment un espace vectoriel  $\mathcal{I}(p, q)$  de dimension  $n^{p+q}$ .

### Contraction d'un tenseur

La contraction entre le i-ème covecteur et le j-ème vecteur est définie comme l'application de  $\mathcal{I}(p, q) \rightarrow \mathcal{I}(p-1, q-1)$

$$T \mapsto C_{[i]_j} T = \sum_k T(\dots, \underbrace{\underline{e}^k}_i, \dots, \dots, \underbrace{\bar{e}_k}_j, \dots). \quad (\text{A.1.23})$$

On vérifie aisément que la contraction ne dépend pas de la base impliquée dans la définition. Les composantes du tenseur contracté sont données par exemple par

$$[C_{[q]} T]^{k_1 \dots k_{p-1}}_{j_1 \dots j_{q-1}} = T^{k_1 \dots k_{p-1} \ell}_{j_1 \dots j_{q-1} \ell}. \quad (\text{A.1.24})$$

### Produit tensoriel de tenseurs

Soit  $S$  un tenseur de type  $\binom{p}{q}$  et  $T$  un tenseur de type  $\binom{n}{m}$ , on définit le tenseur  $S \otimes T$  de type  $\binom{p+n}{q+m}$  par

$$\begin{aligned} (S \otimes T)(\underline{u}^1, \dots, \underline{u}^{p+n}, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{q+m}) &= \\ = S(\underline{u}^1, \dots, \underline{u}^p, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q) T(\underline{u}^{p+1}, \dots, \underline{u}^{p+n}, \bar{v}_{q+1}, \dots, \bar{v}_{q+m}). \end{aligned} \quad (\text{A.1.25})$$

Ses composantes sont données par les produits

$$S^{k_1 \dots k_p}_{j_1 \dots j_p} T^{k_{p+1} \dots k_{p+n}}_{j_{q+1} \dots j_{q+m}}. \quad (\text{A.1.26})$$

En général,  $S \otimes T \neq T \otimes S$ . Le produit tensoriel est associatif: pour trois tenseurs  $S, T, U$ ,

$$S \otimes (T \otimes U) = (S \otimes T) \otimes U \equiv S \otimes T \otimes U. \quad (\text{A.1.27})$$

On en déduit une manière de construire des tenseurs par produits tensoriels de vecteurs et de covecteurs. Un tenseur défini par un tel produit est appelé tenseur simple. Si  $\{\bar{e}_j\}$  est une base de  $V$  et  $\{\underline{e}^j\}$  est sa base duale, on montre aisément que les  $n^{q+p}$  tenseurs simples

$$\bar{e}_{k_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{k_p} \otimes \underline{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \underline{e}^{j_q} \quad (\text{A.1.28})$$

sont linéairement indépendants donc aussi qu'ils fournissent une base de  $\mathcal{I}(p,q)$ . Dans cette base, le tenseur  $T$  s'exprime comme

$$T = T^{k_1 \dots k_p}_{j_1 \dots j_q} \bar{e}_{k_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{k_p} \otimes \underline{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \underline{e}^{j_q}. \quad (\text{A.1.29})$$

Les coefficients  $T^{k_1 \dots k_p}_{j_1 \dots j_q}$  sont les composantes du tenseur  $T$  dans la base "e" définies en (A.1.21). La loi de transformation (A.1.22) de ses composantes lors d'un changement de base (A.1.6) nous assure que

$$T = T'^{k_1 \dots k_p}_{j_1 \dots j_q} \bar{e}'_{k_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}'_{k_p} \otimes \underline{e}'^{j_1} \otimes \dots \otimes \underline{e}'^{j_q}. \quad (\text{A.1.30})$$

**Remarque A.1.** On définit souvent un tenseur par ses composantes dans une base et par la loi de transformation (A.1.22) de ses composantes.

### Exemples

1) Le tenseur de type  $\binom{1}{1}$  défini sur le produit  $V^* \times V$  a pour composantes dans la base "e" les nombres

$$T^k_j = T(\underline{e}^k, \bar{e}_j). \quad (\text{A.1.31})$$

Dans le changement de base (A.1.6) elles deviennent

$$T'^k_j = T^b_a B^a_j B^{-1k}_b. \quad (\text{A.1.32})$$

Le tenseur unité  $I$  est de ce type:

$$I = \bar{e}_j \otimes \underline{e}^j = \bar{e}'_j \otimes \underline{e}'^j \quad (\text{A.1.33})$$

$$I^j_k = I'^j_k = \delta^j_k. \quad (\text{A.1.34})$$

2) Un tenseur de type  $\binom{0}{2}$  ou tenseur deux fois covariant est une application bilinéaire

$$T : V \times V : (\bar{v}, \bar{w}) \mapsto T(\bar{v}; \bar{w}) \in \mathbb{R} \quad (\text{A.1.35})$$

Ses composantes dans la base "e" sont données par les  $n^2$  nombres réels

$$T_{ij} = T(\bar{e}_i, \bar{e}_j). \quad (\text{A.1.36})$$

Le tenseur  $T^t$  transposé de  $T$  est défini par l'égalité,  $\forall \bar{v}, \bar{w}$ ,

$$T^t(\bar{v}, \bar{w}) = T(\bar{w}, \bar{v}). \quad (\text{A.1.37})$$

Le tenseur  $T$  est dit *symétrique* si

$$T^t = T. \quad (\text{A.1.38})$$

Dans ce cas

$$T_{ij} = T_{ji}. \quad (\text{A.1.39})$$

Le tenseur  $T$  est dit *antisymétrique* si

$$T^t = -T. \quad (\text{A.1.40})$$

Dans ce cas

$$T_{ij} = -T_{ji}. \quad (\text{A.1.41})$$

#### A.1.4 Produit scalaire euclidien sur $V$ - Tenseur métrique

**Définition A.4.** *un tel produit scalaire est une application bilinéaire de  $V \times V$  dans  $\mathbb{R}$ , symétrique, définie positive et non dégénérée:*

$$\bar{v} \cdot \bar{w} \in \mathbb{R} \quad (\text{A.1.42})$$

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = \bar{w} \cdot \bar{v} \quad (\text{A.1.43})$$

$$\bar{v} \cdot (a\bar{u} + b\bar{w}) = a\bar{v} \cdot \bar{u} + b\bar{v} \cdot \bar{w} \quad (\text{A.1.44})$$

$$\bar{v} \cdot \bar{v} \geq 0, \quad \bar{v} \cdot \bar{v} = 0 \leftrightarrow \bar{v} = 0. \quad (\text{A.1.45})$$

Deux vecteurs sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul. La longueur ou la norme du vecteur  $\bar{v}$  est la racine carrée positive de son carré scalaire:  $|\bar{v}| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}$ . Le produit scalaire sur  $V$  définit le tenseur métrique  $g$ , symétrique, de type  $\binom{0}{2}$  par

$$g(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{u} \cdot \bar{v}; \quad (\text{A.1.46})$$

ses composantes dans la base "e" sont données par les produits scalaires des vecteurs de base  $[\bar{v} \cdot \bar{w} = v^i w^j (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j)]$ , soit par les nombres

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = g_{ij} = g_{ji}. \quad (\text{A.1.47})$$

Ils forment les éléments d'une matrice réelle  $n \times n$ , symétrique, inversible et dont les éléments de la diagonale principale  $g_{ii} = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_i = h_i^2$  sont strictement positifs. La base  $\{\bar{e}_j\}$  est dite orthogonale si  $g_{ij} = h_i \delta_{ij}$ ; elle est dite orthonormée si  $g_{ij} = \delta_{ij}$ . Dans ce dernier cas, la matrice d'éléments  $g_{ij}$  est égale à la matrice unité  $I$ .

#### A.1.5 Isomorphisme entre $V$ et $V^*$

**Théorème A.1.** *le produit scalaire établit une correspondance 1-1 linéaire entre les vecteurs  $\bar{u}$  de  $V$  et les covecteurs  $\underline{u}$  de  $V^*$  définie par la relation suivante, pour tout  $\bar{v}$  de  $V$*

$$\underline{u}(\bar{v}) = \bar{u} \cdot \bar{v}. \quad (\text{A.1.48})$$

Cette correspondance est un isomorphisme de vectoriels.

A la base duale  $\{\underline{e}^j\}$  de  $V^*$  est ainsi associée, dans  $V$ , la *base réciproque*  $\{\bar{e}_*^1, \bar{e}_*^2, \dots, \bar{e}_*^n\}$  définie par la relation

$$\bar{e}_*^j \cdot \bar{e}_i = \underline{e}^j(\bar{e}_i) = \delta_i^j. \quad (\text{A.1.49})$$

Tout vecteur  $\bar{v}$  de  $V$  peut alors aussi s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de la base réciproque

$$\bar{v} = \bar{e}_*^j v_j. \quad (\text{A.1.50})$$

Les nombres réels  $v_j$  sont les *composantes covariantes* du vecteur  $\bar{v}$ ; elles s'obtiennent par

$$\bar{v} \cdot \bar{e}_j = v_j \quad (\text{A.1.51})$$

et sont reliées aux composantes contravariantes par

$$v_j = (\bar{e}_k v^k) \cdot \bar{e}_j = v^k g_{kj}. \quad (\text{A.1.52})$$

Inversément, les composantes contravariantes de  $\bar{v}$ , peuvent se calculer comme

$$v^j = \bar{v} \cdot \bar{e}_*^j = (\bar{e}_k v^k) \cdot \bar{e}_*^j. \quad (\text{A.1.53})$$

On vérifie aisément que les deux bases de  $V$  sont liées par les relations

$$\bar{e}_j = \bar{e}_*^k g_{kj}, \quad \bar{e}_*^j = \bar{e}_k g^{kj}, \quad (\text{A.1.54})$$

où  $g^{jk}$  désigne l'élément de la ligne  $j$ , colonne  $k$  de la matrice  $g^{-1}$  inverse de la matrice  $g = (g_{ij})$  et que

$$\bar{e}_*^j \cdot \bar{e}_*^k = g^{jk} = g^{kj} \quad (\text{A.1.55})$$

ainsi que

$$v^k = g^{kj} v_j. \quad (\text{A.1.56})$$

Si la base  $\{\bar{e}_j\}$  est orthogonale, il en est de même de la base réciproque et

$$\bar{e}_*^j \cdot \bar{e}_*^j = g^{jj} = \frac{1}{h_j^2}. \quad (\text{A.1.57})$$

Si la base  $\{\bar{e}_j\}$  est orthonormée, la base réciproque est orthonormée et ne se distingue pas de la première; dans une telle base, les composantes covariantes et contravariantes d'un vecteur sont identiques.

Dans la suite, nous serons essentiellement amenés à utiliser des bases naturelles  $\{\bar{e}_j = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^j}\}$  associées à des choix de coordonnées curvilignes orthogonales; nous serons alors amenés à leur associer des bases orthonormées dites physiques  $\{\bar{u}_j\}$  par

$$\bar{e}_j = h_j \bar{u}_j, \quad \bar{u}_j = \frac{1}{h_j} \bar{e}_j. \quad (\text{A.1.58})$$

Nous définirons les *composantes physiques*  $V^j = V_j$  du vecteur  $\bar{v}$  dans la base physique  $\{\bar{u}_i\}$  par

$$\bar{v} = \bar{e}_j v^j = \bar{u}_j V^j = \bar{e}_*^j v_j \quad (\text{A.1.59})$$

elles sont liées aux composantes contravariantes et covariantes par les relations

$$V^j = h_j v^j = \frac{1}{h_j} v_j \quad (\text{il n'y a pas de somme sur } j). \quad (\text{A.1.60})$$

### A.1.6 Produit vectoriel dans $V = \mathbb{R}^3$

**Définition A.5.** Dans  $V = \mathbb{R}^3$ , le produit vectoriel est une application bilinéaire, antisymétrique, de  $V \times V$  dans  $V$  qui vérifie l'identité de Jacobi:

$$\bar{u} \times \bar{v} \in V \quad (\text{A.1.61})$$

$$\bar{u} \times (a\bar{v} + b\bar{w}) = a\bar{u} \times \bar{v} + b\bar{u} \times \bar{w} \quad (\text{A.1.62})$$

$$\bar{u} \times \bar{v} = -\bar{v} \times \bar{u} \quad (\text{A.1.63})$$

$$\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) + \bar{v} \times (\bar{w} \times \bar{u}) + \bar{w} \times (\bar{u} \times \bar{v}) = 0. \quad (\text{A.1.64})$$

Ce produit vectoriel structure  $\mathbb{R}^3$  en une *algèbre de Lie*. Le produit vectoriel est complètement défini sur  $V \times V$  par les produits vectoriels des vecteurs d'une base: il nécessite un choix d'orientation de la base et, par définition,  $\bar{u}, \bar{v}$  et  $\bar{u} \times \bar{v}$  ont la même orientation que la base. Nous utiliserons essentiellement ici des bases dextrogynes. On vérifiera comme exercice qu'entre la base et la base réciproque on a les relations

$$\bar{e}_*^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \bar{e}_j \times \bar{e}_k, \quad \text{et} \quad \bar{e}_i = \sqrt{g} \epsilon_{ijk} \bar{e}_*^j \times \bar{e}_*^k. \quad (\text{A.1.65})$$

$g$  désigne le déterminant de la matrice  $(g_{ij})$  et  $\epsilon^{ijk}$  (respectivement  $\epsilon_{ijk}$ ) est le symbole de Levi-Civita, complètement antisymétrique, qui prend la valeur

$$\begin{cases} i) & 1 \\ ii) & -1 \\ iii) & 0 \end{cases} \quad (\text{A.1.66})$$

i) 1 lorsque les valeurs données aux indices  $i, j, k$  forment une permutation paire de 1,2,3; ii)  $-1$  lorsque les valeurs données à  $i, j, k$  forment une permutation impaire de 1,2,3 et iii) 0 dans tous les autres cas. Avec (A.1.65), le produit vectoriel s'écrit

$$\bar{v} \times \bar{w} = (\bar{e}_k v^k) \times (\bar{e}_\ell w^\ell) = (\bar{e}_*^k v_k) \times (\bar{e}_*^\ell w_\ell) \quad (\text{A.1.67})$$

$$= \sqrt{g} \epsilon_{ijk} \bar{e}_*^i v^j w^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \bar{e}_i v_j w_k. \quad (\text{A.1.68})$$

**Remarque A.2.** i) dans le changement de base (A.1.6), les bases  $\{\bar{e}_i\}$  et  $\{\bar{e}'_i\}$  ont la même orientation si  $\det A > 0$ , des orientations différentes si  $\det A < 0$ .

ii) si la base  $\{\bar{e}_i\}$  est orthogonale et dextrogyre, la base  $\{\bar{e}'_i = -\bar{e}_i\}$  obtenue par renversement du trièdre est orthogonale et lévogyre; par définition,  $\bar{e}_1 \times \bar{e}_2$  est dans la direction de  $\bar{e}_3$  alors que  $\bar{e}'_1 \times \bar{e}'_2$  est dans la direction de  $\bar{e}'_3 = -\bar{e}_3$ . On en déduit que les composantes de  $\bar{v} \times \bar{w}$  dans les bases  $\{\bar{e}_i\}$  et  $\{\bar{e}'_i\}$  sont égales: on dit que  $\bar{v} \times \bar{w}$  est un vecteur axial ou pseudovecteur. Notons que, pour un vecteur (ou vecteur polaire), on a

$$\bar{v} = \bar{e}_j v^j = (-\bar{e}_j)(-v^j) = \bar{e}'_j (-v^j) = \bar{e}'_j v'^j : \quad (\text{A.1.69})$$

lorsqu'on renverse le trièdre, les composantes d'un vecteur changent de signe les composantes d'un pseudovecteur ne changent pas de signe.

iii) Noter les propriétés suivantes

$$\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \cdot \bar{w}) \bar{v} - (\bar{u} \cdot \bar{v}) \bar{w} \quad (\text{A.1.70})$$

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = \bar{v} \cdot (\bar{w} \times \bar{u}) = \bar{w} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) \quad (\text{A.1.71})$$

$$\bar{v} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = 0 = \bar{w} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}). \quad (\text{A.1.72})$$

## A.2 Champs de vecteurs et leurs dérivées

Dans la suite de ce cours, nous utiliserons essentiellement pour repérer les points de l'espace  $\mathbb{R}^3$  des coordonnées curvilignes orthogonales telles les coordonnées cartésiennes, sphériques ou cylindriques. Nous noterons par  $\{\bar{e}_j = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^j}\}$  [respectivement  $\{\bar{u}_j\}$ ] la base naturelle orthogonale [respectivement base physique orthonormée] formée des vecteurs tangents aux lignes de coordonnées passant par le point P de coordonnées  $(q^1, q^2, q^3)$ , orientés vers les  $q^j$  croissants et formant en P un trièdre dextrogyre.

Soit  $d\bar{r}$  le vecteur  $\overline{PP'}$  où P' est un point voisin de P, de coordonnées  $(q^1 + dq^1, q^2 + dq^2, q^3 + dq^3)$ :

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^j} dq^j = \bar{e}_j dq^j = \bar{u}_j h_j dq^j. \quad (\text{A.2.73})$$

Le carré de sa longueur représente le carré de la distance entre P et P' et s'exprime comme

$$d\bar{r}^2 = ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j = h_j^2 (dq^j)^2. \quad (\text{A.2.74})$$

### A.2.1 Gradient d'une fonction scalaire

Soit  $f$  une fonction différentiable de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ , son gradient en P est le vecteur

$$\bar{\nabla} f = \bar{e}_*^j \frac{\partial f}{\partial q^j} = \bar{e}_k g^{kj} \frac{\partial f}{\partial q^j}. \quad (\text{A.2.75})$$

### A.2.2 Différentielle d'une fonction scalaire $f$

La différentielle en P de la fonction  $f$  s'écrit comme

$$df = \frac{\partial f}{\partial q^j} dq^j = \bar{\nabla} f \cdot d\bar{r}. \quad (\text{A.2.76})$$

### A.2.3 Divergence d'un champ de vecteurs

La divergence en P de la fonction vectorielle  $\bar{F} = \bar{e}_j F^j$  de  $R^3$  dans  $R^3$  est le scalaire

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^j} [\sqrt{g} F^j] = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^j} [\sqrt{g} g^{jk} F_k]. \quad (\text{A.2.77})$$

### A.2.4 Laplacien d'une fonction scalaire

Le Laplacien de  $f$ , en P, est la divergence de  $\bar{F} = \bar{\nabla} f$ , gradient de la fonction  $f$ :

$$\Delta f = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} f. \quad (\text{A.2.78})$$

ou, explicitement,

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^j} [\sqrt{g} g^{jk} \frac{\partial f}{\partial q^k}] \quad (\text{A.2.79})$$

### A.2.5 Rotationnel d'un champ de vecteurs

Le rotationnel en P, de la fonction vectorielle  $\bar{F} = \bar{e}_*^j F_j$  est le vecteur

$$\bar{\nabla} \times \bar{F} = \bar{e}_i \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial q^j} F_k = \bar{e}_i \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \partial_j F_k. \quad (\text{A.2.80})$$

Nous ferons souvent usage de la notation abrégée

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial q^j}. \quad (\text{A.2.81})$$

### A.2.6 Laplacien d'un champ de vecteurs $\bar{F}$

Le Laplacien de  $\bar{F}$  au point P est le vecteur

$$\Delta \bar{F} = \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{F}) - \bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{F}). \quad (\text{A.2.82})$$

**Théorème A.2.** *Si  $f$  est de classe  $C^2$ , le rotationnel de son gradient est nul. Autrement dit*

$$\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} f) = \bar{e}_i \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \partial_j \partial_k f = 0. \quad (\text{A.2.83})$$

Ceci résulte du fait que, dans la somme sur les indices  $j$  et  $k$ ,  $\epsilon^{ijk}$  est antisymétrique en  $(jk)$ , alors que les dérivées secondes de  $f$  sont symétriques en  $(jk)$  puisque  $f$  est supposée de classe  $C^2$ :

$$\partial_j \partial_k f = \partial_k \partial_j f. \quad (\text{A.2.84})$$

**Théorème A.3.** *Si les  $F_k$  sont de classe  $C^2$ , la divergence du rotationnel de  $\bar{F}$  est nulle.*

$$\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{F}) = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_j \left[ \sqrt{g} \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{jkm} \partial_k F_m \right] = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{jkm} \partial_j \partial_k F_m = 0. \quad (\text{A.2.85})$$

Dans la sommation sur les indices  $j$  et  $k$ ,  $\epsilon^{jkm}$  est antisymétrique en  $(jk)$ , tandis que, par hypothèse,  $\partial_j \partial_k F_m = \partial_k \partial_j F_m$ .

### A.2.7 Lemmes de Poincaré

**Théorème A.4.** *Soit  $\bar{F}$  un champ vectoriel de classe  $C^1$ , dans un domaine  $D$  étoilé de  $\mathbb{R}^3$ . Si le rotationnel de  $\bar{F}$  est nul dans  $D$ , alors  $\bar{F}$  est le gradient d'un champ scalaire  $f$  de classe  $C^2$ :*

$$\bar{\nabla} \times \bar{F} = 0 \quad \text{ou} \quad \partial_j F_k = \partial_k F_j \rightarrow \bar{F} = \bar{\nabla} f. \quad (\text{A.2.86})$$

**Théorème A.5.** *Soit  $\bar{F}$  un champ vectoriel de classe  $C^1$ , dans un domaine  $D$  étoilé de  $\mathbb{R}^3$ . Si la divergence de  $\bar{F}$  est nulle dans  $D$ , alors  $\bar{F}$  est le rotationnel d'un champ vectoriel  $\bar{G}$  de classe  $C^2$ :*

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{F} = 0 \rightarrow \bar{F} = \bar{\nabla} \times \bar{G}. \quad (\text{A.2.87})$$

Les démonstrations de ces lemmes se trouvent à la fin du cours d'analyse de première candidature et aussi dans l'appendice B.

## A.3 Formulaire

### A.3.1 Coordonnées cartésiennes

$$\bar{r} = x \bar{1}_x + y \bar{1}_y + z \bar{1}_z$$
$$q^1 = x \in R, q^2 = y \in R, q^3 = z \in R \quad (\text{A.3.88})$$

$$\bar{F} = \bar{1}_x F_x + \bar{1}_y F_y + \bar{1}_z F_z \quad (\text{A.3.89})$$

$$d\bar{r} = \bar{1}_x dx + \bar{1}_y dy + \bar{1}_z dz, \quad d\bar{r}^2 = ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{A.3.90})$$

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1 = g^{11} = g^{22} = g^{33}; \quad g = 1 \quad (\text{A.3.91})$$

$$\bar{\nabla} f = \bar{1}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \bar{1}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \bar{1}_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{A.3.92})$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{A.3.93})$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (\text{A.3.94})$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{F} = \bar{1}_x (\partial_y F_z - \partial_z F_y) + \bar{1}_y (\partial_z F_x - \partial_x F_z) + \bar{1}_z (\partial_x F_y - \partial_y F_x) \quad (\text{A.3.95})$$

$$\Delta \bar{F} = \bar{1}_x \Delta F_x + \bar{1}_y \Delta F_y + \bar{1}_z \Delta F_z \quad (\text{A.3.96})$$

### A.3.2 Coordonnées sphériques

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad (\text{A.3.97})$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi \quad (\text{A.3.98})$$

$$z = r \cos \theta \quad (\text{A.3.99})$$



$$q^1 = r \in R_+, q^2 = \theta \in [0, \pi], q^3 = \varphi \in [0, 2\pi] \quad (\text{A.3.100})$$

$$\bar{e}_r = \bar{1}_r, \bar{e}_\theta = r \bar{1}_\theta, \bar{e}_\varphi = r \sin \theta \bar{1}_\varphi \quad (\text{A.3.101})$$

$$\bar{F} = \bar{1}_r F_r + \bar{1}_\theta F_\theta + \bar{1}_\varphi F_\varphi \quad (\text{A.3.102})$$

$$d\bar{r} = \bar{1}_r dr + \bar{1}_\theta r d\theta + \bar{1}_\varphi r \sin \theta d\varphi \quad (\text{A.3.103})$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (\text{A.3.104})$$

$$g_{11} = 1, g_{22} = r^2, g_{33} = r^2 \sin^2 \theta; \quad g = r^4 \sin^2 \theta \quad (\text{A.3.105})$$

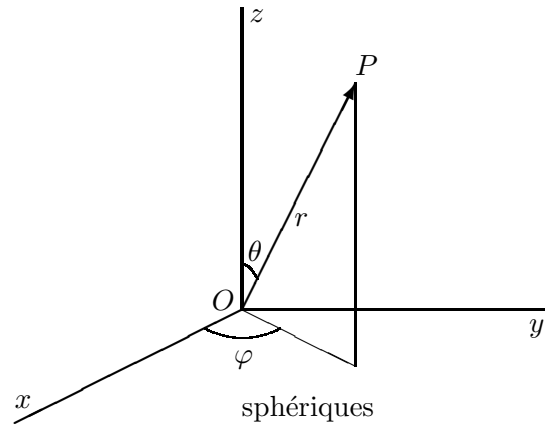
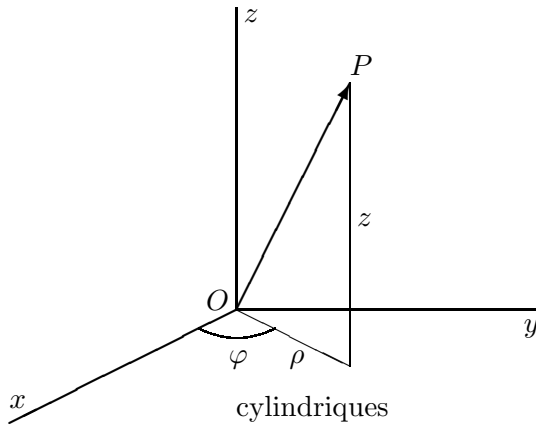
$$g^{11} = 1, g^{22} = \frac{1}{r^2}, g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (\text{A.3.106})$$

$$\bar{\nabla} f = \bar{1}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \bar{1}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \bar{1}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \quad (\text{A.3.107})$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (\text{A.3.108})$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \quad (\text{A.3.109})$$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \times \bar{F} = & \bar{1}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\varphi) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} \right] \\ & + \bar{1}_\theta \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_\varphi) \right] + \bar{1}_\varphi \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.3.110})$$



### A.3.3 Coordonnées cylindriques

$$x = \rho \cos \varphi \quad (\text{A.3.111})$$

$$y = \rho \sin \varphi \quad (\text{A.3.112})$$

$$z = z \quad (\text{A.3.113})$$

$$q^1 = \rho \in R_+, q^2 = \varphi \in [0, 2\pi], q^3 = z \in R \quad (\text{A.3.114})$$

$$\bar{e}_\rho = \bar{1}_\rho, \bar{e}_\varphi = \rho \bar{1}_\varphi, \bar{e}_z = \bar{1}_z \quad (\text{A.3.115})$$

$$\bar{F} = \bar{1}_\rho F_\rho + \bar{1}_\varphi F_\varphi + \bar{1}_z F_z \quad (\text{A.3.116})$$

$$d\bar{r} = \bar{1}_\rho d\rho + \bar{1}_\varphi \rho d\varphi + \bar{1}_z dz \quad (\text{A.3.117})$$

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 \quad (\text{A.3.118})$$

$$g_{11} = 1, g_{22} = \rho^2, g_{33} = 1, g = \rho^2 \quad (\text{A.3.119})$$

$$g^{11} = 1, g^{22} = \frac{1}{\rho^2}, g^{33} = 1 \quad (\text{A.3.120})$$

$$\bar{\nabla} f = \bar{1}_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \bar{1}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \bar{1}_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{A.3.121})$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{A.3.122})$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (\text{A.3.123})$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{F} = \bar{1}_\rho \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \right] + \bar{1}_\varphi \left[ \frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right] + \quad (\text{A.3.124})$$

$$+ \bar{1}_z \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\varphi) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} \right] \quad (\text{A.3.125})$$

## A.4 Intégration des champs de vecteurs

### A.4.1 Élément de volume

L'élément de volume au point P, de coordonnées  $\bar{r} = \bar{r}(q^1, q^2, q^3)$ , est le volume (orienté) engendré par les trois vecteurs  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q^1} dq^1 = \bar{e}_1 dq^1$ ,  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q^2} dq^2 = \bar{e}_2 dq^2$ ,  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q^3} dq^3 = \bar{e}_3 dq^3$ ; il vaut

$$dv = \bar{e}_1 \cdot (\bar{e}_2 \times \bar{e}_3) dq^1 dq^2 dq^3 \quad (\text{A.4.126})$$

$$= \sqrt{g} dq^1 dq^2 dq^3 = \sqrt{g} d^3 q. \quad (\text{A.4.127})$$

En coordonnées cartésiennes:  $dv = dx dy dz$ . En coordonnées sphériques:  $dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = -r^2 dr d \cos \theta d\varphi$ . En coordonnées cylindriques:  $dv = \rho d\rho d\varphi dz$ .

### A.4.2 Élément d'aire au point P de la surface d'équation

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v).$$

C'est le pseudo-vecteur en P, normal à la surface, dont la longueur est égale à l'aire sous-tendue par les vecteurs tangents  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} du = \bar{e}_u du$  et  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} dv = \bar{e}_v dv$ . Il vaut

$$\overline{dS} = \bar{e}_u \times \bar{e}_v du dv. \quad (\text{A.4.128})$$

#### Exemples:

l'élément d'aire sur le plan  $z = a$  est donné par  $\overline{dS} = \bar{1}_z dx dy, \dots$ ; l'élément d'aire sur la sphère  $r = a$  est donné par  $\overline{dS} = \bar{1}_r a^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \dots$ ; l'élément d'aire sur le cylindre  $\rho = a$  est donné par  $\overline{dS} = \bar{1}_\rho a d\varphi dz, \dots$

### A.4.3 Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une portion de courbe d'équation $\bar{r} = \bar{r}(u)$

Soit  $C$  une courbe d'équation  $\bar{r} = \bar{r}(u)$ , d'extrémités A et B plongée dans  $\mathbb{R}^3$ , admettant en chaque point un vecteur tangent (orienté). La circulation du champ vectoriel  $\bar{F}$  le long de la courbe  $C$ , entre A et B, est donnée par l'intégrale curviligne

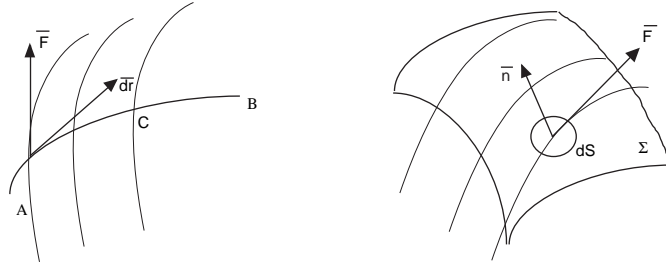
$$\int_A^B d\bar{r} \cdot \bar{F} = \int_{u_A}^{u_B} du \frac{d\bar{r}}{du} \cdot \bar{F}(u). \quad (\text{A.4.129})$$

Remarque: Il résulte directement de la définition de la différentielle que si  $\bar{F} = \bar{\nabla} f$ , alors

$$\int_A^B d\bar{r} \cdot \bar{\nabla} f = \int_A^B df = f(B) - f(A) \quad (\text{A.4.130})$$

indépendamment du chemin suivi pour aller de A en B car

$$\oint_C d\bar{r} \cdot \bar{\nabla} f = \oint_C df = 0. \quad (\text{A.4.131})$$



### A.4.4 Flux d'un champ de vecteurs au travers d'une portion de surface

Soit  $\Sigma$  une portion de surface plongée dans  $\mathbb{R}^3$ , admettant en chaque point un plan tangent et un vecteur unité normal  $\bar{n}$  (orienté). Le flux du champ vectoriel  $\bar{F}$  au travers de  $\Sigma$  est donné par l'intégrale de surface

$$\int_{\Sigma} \overline{dS} \cdot \bar{F} = \int_{\Sigma} dS \bar{n} \cdot \bar{F} \quad (\text{A.4.132})$$

où  $\overline{dS} = \bar{n} dS$  est l'élément d'aire sur la surface  $\Sigma$ .

### A.4.5 Théorème d'Ostrogradsky ou de la divergence

Le flux du champ de vecteurs  $\bar{F}$  sortant de la surface fermée  $S$  est égal à l'intégrale de la divergence de  $\bar{F}$  sur le volume  $V$  limité par  $S$ :

$$\oint_S \overline{dS} \cdot \bar{F} = \int_V dv \bar{\nabla} \cdot \bar{F}. \quad (\text{A.4.133})$$

#### A.4.6 Théorème de Stokes

La circulation de  $\vec{F}$  le long de la boucle fermée  $C$  est égale au flux du rotationnel de  $\vec{F}$  au travers d'une surface  $\Sigma$  arbitraire qui s'appuie sur  $C$ :

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_{\Sigma} d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}). \quad (\text{A.4.134})$$

La valeur de cette intégrale ne dépend pas de  $\Sigma$  puisque que le flux d'un rotationnel sortant d'une surface fermée est nul en vertu du théorème d'Ostrogradsky (la divergence d'un rotationnel est nulle):

$$\oint_S d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \int_V dv \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0. \quad (\text{A.4.135})$$

## Annexe B

# Lemmes de Poincaré

### B.1 Premier Lemme

**Théorème B.1.** Soient  $f_j(x^1, x^2, \dots, x^n) = f_j(\bar{x})$  les composantes covariantes d'un champ de vecteurs, supposées de classe  $C^1$  sur le domaine étoilé  $D$  de  $R^n$ . Si, dans  $D$ , les  $f_j$  satisfont

$$\partial_k f_j - \partial_j f_k = 0 \quad (\text{B.1.1})$$

alors il existe une fonction  $h(\bar{x})$  de classe  $C^2$  telle que

$$f_j(\bar{x}) = \partial_j h(\bar{x}). \quad (\text{B.1.2})$$

En effet, posons

$$h(\bar{x}) = \int_0^1 dt x^j f_j(t\bar{x}). \quad (\text{B.1.3})$$

En dérivant les deux membres par rapport à la variable  $x^k$ , il vient

$$\partial_k h(\bar{x}) = \int_0^1 dt [x^j \partial_k f_j(tx^1, tx^2, \dots, tx^n) + \delta_k^j f_j(t\bar{x})] \quad (\text{B.1.4})$$

$$= \int_0^1 dt [tx^j \frac{\partial}{\partial tx^k} f_j(tx^1, tx^2, \dots, tx^n) + f_k(t\bar{x})] \quad (\text{B.1.5})$$

$$= \int_0^1 dt [tx^j \frac{\partial}{\partial tx^j} f_k(tx^1, tx^2, \dots, tx^n) + f_k(t\bar{x})] \quad (\text{B.1.6})$$

$$= \int_0^1 dt [t \frac{d}{dt} f_k(tx^1, tx^2, \dots, tx^n) + f_k(t\bar{x})] \quad (\text{B.1.7})$$

$$= \int_0^1 dt \frac{d}{dt} [t f_k(tx^1, tx^2, \dots, tx^n)] \quad (\text{B.1.8})$$

$$= [t f_k(tx^1, tx^2, \dots, tx^n)]|_{t=0}^{t=1} = f_k(x^1, x^2, \dots, x^n). \quad (\text{B.1.9})$$

#### B.1.1 Cas particulier $n = 3$

Les équations (B.1.1) expriment (sous la forme duale) que le rotationnel de  $\bar{f}$  est nul. En effet, rappelons que

$$\nabla \times \bar{f} = \bar{e}_i \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \partial_j f_k. \quad (\text{B.1.10})$$

Ce lemme nous dit alors que  $\bar{f}$  est le gradient d'un champ scalaire  $h$ :

$$f_j = \partial_j h \quad , \quad \bar{f} = \overline{\nabla h}. \quad (\text{B.1.11})$$

## B.2 Deuxième Lemme

**Théorème B.2.** Soient  $b_{k\ell}(\bar{x}) = -b_{\ell k}(\bar{x})$  les composantes deux fois covariantes d'un champ de tenseurs antisymétriques telles que, sur le domaine  $D$  étoilé de  $R^n$ ,

$$\partial_j b_{k\ell} + \partial_k b_{\ell j} + \partial_\ell b_{jk} = 0. \quad (\text{B.2.12})$$

Il existe un champs de vecteurs  $\bar{h}$ , dont les composantes covariantes  $h_k$  sont de classe  $C^2$ , tel que

$$b_{k\ell} = \partial_k h_\ell - \partial_\ell h_k. \quad (\text{B.2.13})$$

Posons

$$h_\ell(\bar{x}) = \int_0^1 dt t x^j b_{j\ell}(t\bar{x}) \quad (\text{B.2.14})$$

et dérivons les deux membres par rapport à  $x^k$ , il vient

$$\partial_k h_\ell = \int_0^1 dt t [\delta_k^j b_{j\ell}(t\bar{x}) + x^j \partial_k b_{j\ell}(t\bar{x})] \quad (\text{B.2.15})$$

$$= \int_0^1 dt t [b_{k\ell}(t\bar{x}) + x^j \partial_k b_{j\ell}(t\bar{x})] \quad (\text{B.2.16})$$

On a donc aussi

$$\partial_k h_\ell - \partial_\ell h_k = \int_0^1 dt t [b_{k\ell}(t\bar{x}) + x^j \partial_k b_{j\ell}(t\bar{x}) - b_{\ell k}(t\bar{x}) - x^j \partial_\ell b_{jk}(t\bar{x})] \quad (\text{B.2.17})$$

$$= \int_0^1 dt t [2b_{k\ell}(t\bar{x}) + x^j (\partial_k b_{j\ell}(t\bar{x}) + \partial_\ell b_{kj}(t\bar{x}))] \quad (\text{B.2.18})$$

$$= \int_0^1 dt t [2b_{k\ell}(t\bar{x}) + t x^j (\frac{\partial}{\partial t x^k} b_{j\ell}(t\bar{x}) + \frac{\partial}{\partial t x^\ell} b_{kj}(t\bar{x}))] \quad (\text{B.2.19})$$

$$= \int_0^1 dt t [2b_{k\ell}(t\bar{x}) + t x^j \frac{\partial}{\partial t x^j} b_{k\ell}(t\bar{x})] \quad (\text{B.2.20})$$

$$= \int_0^1 dt [2t b_{k\ell}(t\bar{x}) + t^2 \frac{d}{dt} b_{k\ell}(t\bar{x})] \quad (\text{B.2.21})$$

$$= \int_0^1 dt \frac{d}{dt} [t^2 b_{k\ell}(t\bar{x})] \quad (\text{B.2.22})$$

$$= b_{k\ell}(\bar{x}) \quad (\text{B.2.23})$$

### B.2.1 Cas particulier n=3

Si les  $f^j(\bar{x})$  désignent les composantes contravariantes d'un champ de vecteurs à divergence nulle

$$\overline{\nabla} \cdot \bar{f} = 0 = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_j (\sqrt{g} f^j) \quad (\text{B.2.24})$$

alors, il existe un champ de vecteurs  $\bar{h}$  dont  $\bar{f}$  est le rotationnel. Introduisons d'abord le tenseur antisymétrique  $b_{k\ell} = -b_{\ell k}$  dual de  $\bar{f}$  et défini par

$$f^j = \frac{1}{2\sqrt{g}} \epsilon^{jkl} b_{kl} \quad (\text{B.2.25})$$

pour laquelle la condition de divergence nulle devient

$$\epsilon^{jkl} \partial_j b_{kl} = 0 \quad (\text{B.2.26})$$

ou

$$\partial_j b_{kl} + \partial_k b_{lj} + \partial_\ell b_{jk} = 0. \quad (\text{B.2.27})$$

Du lemme précédent, on déduit que

$$b_{k\ell} = \partial_k h_\ell - \partial_\ell h_k \quad (\text{B.2.28})$$

et donc que

$$f^j = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{jkl} \partial_k h_\ell \quad (\text{B.2.29})$$

ou encore que

$$\bar{f} = \bar{\nabla} \times \bar{h}. \quad (\text{B.2.30})$$

## Annexe C

# Séries et intégrales de Fourier

### C.1 Séries de Fourier

**Définition C.1.** La série de Fourier d'une fonction  $f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$  est la série trigonométrique suivante

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \quad (\text{C.1.1})$$

où les coefficients sont donnés par

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dy f(y) \cos ny, \quad n \geq 0 \quad (\text{C.1.2})$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dy f(y) \sin ny, \quad n \geq 1 \quad (\text{C.1.3})$$

La série de Fourier converge vers la fonction  $f$  au sens de la norme de  $L^2$  ou en moyenne quadratique.

Si  $f$  est paire, c'est-à-dire  $f(x) = f(-x)$ , tous les  $b_n$  sont nuls et les  $a_n$  se calculent par

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dy f(y) \cos ny; \quad (\text{C.1.4})$$

tandis que si  $f$  est impaire,  $f(x) = -f(-x)$ , tous les  $a_n$  sont nuls et les  $b_n$  sont donnés par

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dy f(y) \sin ny. \quad (\text{C.1.5})$$

De plus, pour  $f$  de carré sommable, l'égalité de Parseval fournit

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx |f(x)|^2 = \frac{1}{2} |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} [|a_n|^2 + |b_n|^2]. \quad (\text{C.1.6})$$

#### C.1.1 Série de Fourier complexe

Par les formules d'Euler

$$\sin nx = \frac{1}{2i} (e^{inx} - e^{-inx}) \quad (\text{C.1.7})$$

$$\cos nx = \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) \quad (\text{C.1.8})$$



ou

$$e^{\pm inx} = \cos nx \pm i \sin nx, \quad (\text{C.1.9})$$

la série précédente se transforme en la série de Fourier complexe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{n=-K}^K c_n e^{inx}, \quad (\text{C.1.10})$$

avec

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dy f(y) e^{-iny}. \quad (\text{C.1.11})$$

### C.1.2 Exemples

Les coefficients de Fourier des fonctions suivantes pour  $-\pi \leq x \leq \pi$  sont donnés par

a)  $f(x) = x,$

Réponse:  $a_n = 0; b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

b)  $f(x) = |x|,$

Réponse:  $b_n = 0; a_0 = \pi; a_n = 0$  pour  $n$  pair,  $a_n = -\frac{4}{\pi n^2}$  pour  $n$  impair et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad (\text{C.1.12})$$

c)  $f(x) = 1 \quad x > 0; -1 \quad x < 0,$

Réponse:  $a_n = 0; b_n = 0$  pour  $n$  pair,  $b_n = \frac{4}{\pi n}$  pour  $n$  impair et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad (\text{C.1.13})$$

d)  $f(x) = (\sin x)^3 = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$

e)  $f(x) = 3(\sin x)^2 \cos x = \frac{d}{dx} \sin^3 x$

### C.1.3 Fonction définie sur $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$

Les séries de Fourier se transforment en

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{2\pi nx}{L} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{L} \right] \quad (\text{C.1.14})$$

avec, cette fois,

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy f(y) \cos \frac{2\pi ny}{L}, \quad n \geq 0, \quad (\text{C.1.15})$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy f(y) \sin \frac{2\pi ny}{L}, \quad n \geq 1. \quad (\text{C.1.16})$$

### C.1.4 Série de Fourier d'une fonction de $N$ variables

Les formules précédentes se généralisent directement à  $N$  dimensions en

$$f(\bar{x}) = \sum_{\bar{n}=-\infty}^{+\infty} c_{\bar{n}} e^{i\bar{n} \cdot \bar{x}}, \quad (\text{C.1.17})$$

avec

$$c_{\bar{n}} = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\pi}^{\pi} d^N y f(\bar{y}) e^{-i\bar{n} \cdot \bar{y}}. \quad (\text{C.1.18})$$

Ici,  $\bar{x}$  ou  $\bar{y}$  désigne un point de l'hypercube  $-\pi \leq x^k \leq \pi$  pour  $k = 1, \dots, N$  et  $\bar{n} = (n^1, \dots, n^N)$  où  $n^k$  est un entier, pour tout  $k$ .

## C.2 Intégrales de Fourier

L'intégrale de Fourier d'une fonction  $f(x)$  dans  $L^2(\mathbb{R})$  est définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx}, \quad (\text{C.2.19})$$

où la fonction  $\tilde{f}(k)$ , appelée transformée de Fourier de  $f$ , est donnée par

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(y) e^{-iky}. \quad (\text{C.2.20})$$

L'égalité de Parseval-Plancherel fournit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dk |\tilde{f}(k)|^2. \quad (\text{C.2.21})$$

### C.2.1 Exemples

Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes

a)  $f(x) = c$ , si  $-a \leq x \leq a$ ; 0 ailleurs.

Réponse:  $\tilde{f}(k) = c \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ka}{k}$

b)  $f(x) = e^{-ax}$ , si  $x > 0$ ; 0, si  $x < 0$ . ( $a \in \mathbb{R}, a > 0$ )

Réponse:  $\tilde{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a+ik}$

c)  $f(x) = e^{-a|x|}$ ,  $a > 0$  et réel;

Réponse:  $\tilde{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2+k^2}$

d)  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ ;

Réponse:  $\tilde{f} = \sigma e^{-\frac{k^2 \sigma^2}{2}}$ .

Rappel: l'intégrale de Poisson vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du e^{-u^2} = \sqrt{\pi}. \quad (\text{C.2.22})$$

## C.2.2 Généralisation aux fonctions de $N$ variables.

Comme précédemment, la généralisation à  $N$  dimensions est immédiate:

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N}} \int_{-\infty}^{+\infty} d^N k \tilde{f}(\bar{k}) e^{i\bar{k} \cdot \bar{x}} \quad (\text{C.2.23})$$

$$\tilde{f}(\bar{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N}} \int_{-\infty}^{+\infty} d^N x f(\bar{x}) e^{-i\bar{k} \cdot \bar{x}} \quad (\text{C.2.24})$$

## C.2.3 Exercices

a) Montrer que, à trois dimensions, la transformée de Fourier d'une fonction invariante par rotation, c'est-à-dire  $f(\bar{x}) = f(r)$ , pour  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  est une fonction invariante par rotation, c'est-à-dire  $\tilde{f}(\bar{k}) = \tilde{f}(k)$ ,  $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$ .

Réponse:

$$\tilde{f}(\bar{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3 x f(r) e^{-i\bar{k} \cdot \bar{x}} \quad (\text{C.2.25})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3 x f(r) e^{-i \sum_{a=1}^3 k_a x_a} \quad (\text{C.2.26})$$

Soient

$$k'_a = \sum_{b=1}^3 k_b O_{ba} \quad (\text{C.2.27})$$

les composantes d'un vecteur  $\bar{k}'$  qui se déduit de  $\bar{k}$  par une rotation;  $O$  est une matrice orthogonale

$$O O^t = I, \quad O_{ab}^{-1} = O_{ab}^t = O_{ba}, \quad \det O = 1. \quad (\text{C.2.28})$$

Montrons que  $\tilde{f}(\bar{k}') = \tilde{f}(\bar{k})$

$$\tilde{f}(\bar{k}') = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3 x f(r) e^{-i\bar{k}' \cdot \bar{x}} \quad (\text{C.2.29})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3 x f(r) e^{-i \sum_{a=1}^3 k'_a x_a} \quad (\text{C.2.30})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3 x f(r) e^{-i \sum_{a,b=1}^3 (k_b O_{ba}) x_a} \quad (\text{C.2.31})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3 x f(r) e^{-i \sum_{a,b=1}^3 k_b (O_{ba} x_a)} \quad (\text{C.2.32})$$

Dans la dernière intégrale, introduisons le changement de variables d'intégration suivant

$$u_b = \sum_{a=1}^3 O_{ba} x_a \quad (\text{C.2.33})$$

$$d^3 u = d^3 x \det O = d^3 x, \quad r = |\bar{x}| = |\bar{u}| = u; \quad (\text{C.2.34})$$

cette intégrale devient

$$\tilde{f}(\bar{k}') = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3u f(u) e^{-i \sum_{b=1}^3 k_b u_b} \quad (\text{C.2.35})$$

elle ne diffère de  $\tilde{f}(\bar{k})$  définie ci-dessus que par le nom des variables d'intégration. Pour calculer cette intégrale, on choisira avantageusement  $\bar{k} = k \bar{1}_z$ , de sorte que

$$\bar{k} \cdot \bar{x} = k \bar{1}_z \cdot \bar{x} = k z = k r \cos\theta. \quad (\text{C.2.36})$$

En passant aux coordonnées sphériques, il vient

$$\tilde{f}(\bar{k}) = \tilde{f}(k) \quad (\text{C.2.37})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_0^\infty dr r^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi f(r) e^{-ikr\cos\theta} \quad (\text{C.2.38})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_0^\infty dr r^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta f(r) e^{-ikr\cos\theta} \quad (\text{C.2.39})$$

$$= \frac{i}{\sqrt{(2\pi)}} \int_0^\infty dr r^2 f(r) \frac{[e^{-ikr} - e^{ikr}]}{kr} \quad (\text{C.2.40})$$

$$= \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dr r f(r) \sin kr. \quad (\text{C.2.41})$$

b) Appliquer ceci au calcul de la transformée de Fourier du potentiel de Yukawa

$$f(r) = \frac{1}{r} e^{-\mu r}, \quad \mu \in R_+. \quad (\text{C.2.42})$$

En déduire, à la limite  $\mu \rightarrow 0$ , la transformée de Fourier de la fonction  $\frac{1}{r}$ .

Réponse: La transformée de Fourier du potentiel de Yukawa est donnée par  $\tilde{f} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\mu^2 + k^2}$ .

c) En utilisant le résultat ci-dessus, montrer que la transformée de Fourier de  $\Delta \frac{1}{r}$  est une constante.

d) Quelle est la solution générale, à valeur complexe, développable en intégrale de Fourier, de l'équation de KLEIN-GORDON

$$(\square + \kappa^2)\phi(\bar{x}, t) = 0, \quad (\text{C.2.43})$$

où

$$\square = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta. \quad (\text{C.2.44})$$

En déduire la solution générale développable en intégrale de Fourier de l'équation de d'ALEMBERT

$$\square\phi(\bar{x}, t) = 0. \quad (\text{C.2.45})$$

Réponses:

$$\phi(\bar{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3k [a(\bar{k}) e^{-i\omega_k t + i\bar{k} \cdot \bar{x}} + b^*(\bar{k}) e^{i\omega_k t - i\bar{k} \cdot \bar{x}}] \quad (\text{C.2.46})$$

où

$$\omega_k = +\sqrt{\bar{k}^2 + \kappa^2}. \quad (\text{C.2.47})$$

## Annexe D

# Eléments de la théorie des distributions

### D.1 Distributions de SCHWARTZ [5]

Soit  $\mathcal{D}$  l'espace vectoriel des fonctions  $C^\infty$  à support compact. Introduisons dans  $\mathcal{D}$  la notion suivante de convergence: la suite  $\phi_n$  converge vers zéro dans  $\mathcal{D}$  si

a) les supports de tous les  $\phi_n$  sont contenus dans un même compact  $K$

b) la suite  $\phi_n$  et toutes les suites dérivées  $\phi_n^{(k)}$  convergent uniformément vers zéro sur  $K$ .

La suite  $\phi_n$  converge vers  $\phi$  dans  $\mathcal{D}$  si la suite  $\phi_n - \phi$  converge vers zéro dans  $\mathcal{D}$ .

**Définition D.1.** Une distribution de Schwartz,  $T$ , est par définition une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace  $\mathcal{D}$ , c'est-à-dire, une application

$$T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R} : \phi \rightarrow (T, \phi) \quad (\text{D.1.1})$$

telle que

$$(T, a\phi_1 + b\phi_2) = a(T, \phi_1) + b(T, \phi_2) \quad (\text{D.1.2})$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T, \phi_n) = (T, \phi) \quad (\text{D.1.3})$$

si la suite  $\phi_n$  converge vers  $\phi$  dans  $\mathcal{D}$ .

L'espace des distributions de Schwartz, muni d'une structure d'espace vectoriel, est noté  $\mathcal{D}'$ . C'est le dual topologique de  $\mathcal{D}$ ; il est inclus dans l'espace dual  $\mathcal{D}^*$ .

#### D.1.1 Exemples

##### Distribution associée à une fonction

Soit  $f(x)$  une fonction localement intégrable, c'est-à-dire, intégrable sur tout compact, elle définit une fonctionnelle linéaire continue  $T_f$  sur  $\mathcal{D}$  par

$$(T_f, \phi) = \int_{\mathcal{R}} dx \quad f(x)\phi(x). \quad (\text{D.1.4})$$

Si  $D$  est une dérivée d'ordre arbitraire et  $f(x)$  une fonction localement intégrable,

$$(f(x)D, \phi) = \int_{\mathcal{R}} dx \quad f(x)D\phi(x) \quad (\text{D.1.5})$$

définit également une distribution.

### La distribution $\delta$ de Dirac

Elle est définie par

$$(\delta, \phi) = \phi(0). \quad (\text{D.1.6})$$

Les physiciens lui associent une "fonction"  $\delta(x)$  et conservent la notation intégrale qui dans ce cas devient purement formelle:

$$(\delta, \phi) = \int_{\mathcal{R}} dx \delta(x) \phi(x). \quad (\text{D.1.7})$$

La distribution  $\delta_a$  est définie par

$$(\delta_a, \phi) = \phi(a). \quad (\text{D.1.8})$$

C'est la translatée de  $\delta$ . La "fonction" qui lui est associée est  $\delta(x - a)$ .

**Remarque D.1.** *Chaque distribution  $T$  peut être étendue comme fonctionnelle linéaire continue sur un ensemble de fonctions plus grand que  $\mathcal{D}$ , dépendant de  $T$ . L'espace  $\mathcal{D}$  est l'espace de fonctions sur lequel toutes les distributions sont définies. Par exemple,  $\delta$  peut être étendue à l'espace des fonctions  $\phi$  continues à l'origine;  $f$  peut être étendue à toutes les fonctions  $\phi$  telles que  $f\phi$  est intégrable, ... Moyennant ces extensions de l'espace des fonctions "test", on peut par exemple donner un sens à  $(\delta, 1) = 1 = \int_{\mathcal{R}} dx \delta(x)$ , bien que la fonction  $\phi = 1$  ne soit pas dans  $\mathcal{D}$ .*

### D.1.2 Convergence dans $\mathcal{D}'$

On dit que la suite  $T_n$  de distributions de  $\mathcal{D}'$  converge vers la distribution  $T$  de  $\mathcal{D}'$  si, pour tout  $\phi$  de  $\mathcal{D}$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T_n, \phi) = (T, \phi). \quad (\text{D.1.9})$$

Dans ce sens, par exemple, la suite de fonctions  $T_n = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} \rightarrow \delta$ .

**Théorème D.1.** *L'espace  $\mathcal{D}'$  est complet*

càd, si la suite  $T_n$  est telle que pour tout  $\phi$  dans  $\mathcal{D}$ , la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_n, \phi)$  existe, alors l'application  $\phi \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (T_n, \phi)$  définit une distribution  $T$  de  $\mathcal{D}'$  et  $T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ .

**Théorème D.2.**  *$\mathcal{D}$  est dense dans  $\mathcal{D}'$*

càc que, quelle que soit la distribution  $T$  de  $\mathcal{D}'$ , il existe une suite de fonctions  $f_n$  de  $\mathcal{D}$  dont la suite des distributions  $T_{f_n}$  associées converge vers  $T$  dans  $\mathcal{D}'$ , c'est-à-dire, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{R}} dx f_n(x) \phi(x) = (T, \phi). \quad (\text{D.1.10})$$

Par exemple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathcal{R}} dx e^{-n^2 x^2} \phi(x) = \phi(0) = (\delta, \phi). \quad (\text{D.1.11})$$

### D.1.3 Propriétés locales des distributions.

On ne peut pas, en général, attribuer à une distribution une valeur précise en un point. Même pour une distribution associée à une fonction, la fonctionnelle étant définie par une intégrale, toute fonction égale presque partout à  $f$  définit la même distribution. On peut cependant définir des propriétés locales de distributions, c'est-à-dire des propriétés relatives à des voisinages ouverts.

#### Egalité de deux distributions sur un ouvert $\Omega$

$T_1 = T_2$  sur  $\Omega$  si, pour tout  $\phi$  dans  $\mathcal{D}$  dont le support est contenu dans  $\Omega$ ,

$$(T_1, \phi) = (T_2, \phi). \quad (\text{D.1.12})$$

$T = 0$  sur  $\Omega$ , si, pour tout  $\phi$  dans  $\mathcal{D}$  dont le support est contenu dans  $\Omega$ ,

$$(T, \phi) = 0. \quad (\text{D.1.13})$$

$T_1 = T_2$  si  $(T_1, \phi) = (T_2, \phi)$  pour tout  $\phi$  dans  $\mathcal{D}$ .

#### Exemple

si  $f_1$  et  $f_2$  sont deux fonctions localement intégrables, égales presque partout, les distributions  $T_{f_1}$  et  $T_{f_2}$  sont égales. Si l'on convient d'identifier deux fonctions localement intégrables lorsqu'elles sont égales presque partout, les distributions sont une généralisation de la notion de fonction localement intégrable. C'est pourquoi, on est amené à identifier une fonction  $f$  localement intégrable définie presque partout à la fonctionnelle  $T_f$  qu'elle définit et on écrit

$$(f, \phi) = (T_f, \phi) = \int_{\mathcal{R}} dx f(x) \phi(x). \quad (\text{D.1.14})$$

En particulier, la fonctionnelle qui à chaque  $\phi$  associe  $\int_{\mathcal{R}} dx \phi(x)$  est la distribution  $f = 1$ . La distribution  $\delta$  est égale à zéro sur l'ouvert  $\Omega = \mathcal{R} - \{0\}$ .

On appelle *support d'une distribution*  $T$  le complémentaire dans  $\mathcal{R}$  du plus grand ouvert  $\Omega$  sur lequel  $T = 0$ . Si  $f$  est localement intégrable,  $\text{supp} T_f = \text{supp} f$ ; tandis que  $\text{supp} \delta = \{0\}$ .



### D.1.4 Opérations sur les distributions.

#### Translatée d'une distribution $\tau_a T$

Pour tout  $\phi$  dans  $\mathcal{D}$ , la translatée de  $T$  est définie par

$$(\tau_a T(x), \phi(x)) = (T(x), \phi(x+a)). \quad (\text{D.1.15})$$

Par exemple,

$$(\tau_a T_f(x), \phi(x)) = (T_f(x), \phi(x+a)) = \int_{\mathcal{R}} dx f(x) \phi(x+a) = \int_{\mathcal{R}} dx f(x-a) \phi(x), \quad (\text{D.1.16})$$

de même, la translatée de  $\delta$  est telle que

$$(\tau_a \delta(x), \phi(x)) = (\delta_a(x), \phi(x)) = (\delta(x), \phi(x+a)) = \phi(a). \quad (\text{D.1.17})$$

#### Changements de variables

Soit  $f(x)$  une fonction localement intégrable et soit  $y = u(x)$  une fonction  $C^\infty$  établissant une correspondance (1-1) entre  $\mathcal{R}_x$  et  $\mathcal{R}_y$  telle que  $\frac{du}{dx} \neq 0$ . Alors  $x = u^{-1}(y)$ . Puisque la distribution  $T_f$  est définie par une intégrale, nous savons comment effectuer dans ce cas un changement de variable d'intégration

$$\begin{aligned} (f(u^{-1}(y), \phi(y)) &= \int_{\mathcal{R}} dy f(u^{-1}(y)) \phi(y) = \int_{\mathcal{R}} dx \left| \frac{du}{dx} \right| f(x) \phi(u(x)) \\ &= (f(x), \left| \frac{du}{dx} \right| \phi(u(x))). \end{aligned} \quad (\text{D.1.18})$$

Pour la distribution  $T(u^{-1}(y))$ , on prend comme définition

$$(T(u^{-1}(y)), \phi(y)) = (T(x), \left| \frac{du}{dx} \right| \phi(u(x))) \quad (\text{D.1.19})$$

ou plus généralement, dans  $\mathcal{R}^n$ ,

$$(T(u^{-1}(y)), \phi(y)) = (T(x), \left| \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right| \phi(u(x))). \quad (\text{D.1.20})$$

Exemple: pour une translation,  $y = u(x) = x + a, x = u^{-1}(y) = y - a$

$$(T(y-a), \phi(y)) = (T(x), \phi(x+a)) = (\tau_a T(x), \phi(x)). \quad (\text{D.1.21})$$

Exemple: pour une dilatation,  $y = u(x) = ax, x = u^{-1}(y) = \frac{y}{a}$

$$(T\left(\frac{y}{a}\right), \phi(y)) = (T(x), |a| \phi(ax)). \quad (\text{D.1.22})$$

#### Exemples

$$(\delta(y-a), \phi(y)) = (\delta(x), \phi(x+a)) = \phi(a) \quad (\text{D.1.23})$$

$$\left(\delta\left(\frac{y}{a}\right), \phi(y)\right) = (\delta(x), |a| \phi(ax)) = |a| \phi(0), \quad (\text{D.1.24})$$

d'où on tire, au sens de distribution

$$\delta\left(\frac{y}{a}\right) = |a| \delta(y). \quad (\text{D.1.25})$$

## Dérivées d'une distribution.

En généralisant la formule d'intégration par parties valable pour les distributions associées à des fonctions localement intégrables, on définit la dérivée  $T'$  de  $T$  par

$$(T'(x), \phi(x)) = -(T(x), \phi'(x)). \quad (\text{D.1.26})$$

Il vient donc par exemple

$$(\delta', \phi) = -(\delta, \phi') = -\phi'(0). \quad (\text{D.1.27})$$

Dans  $\mathcal{D}'_{\mathcal{R}^n}$ , on définit les dérivées partielles de  $T$  par

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x^k}, \phi\right) = -\left(T, \frac{\partial \phi}{\partial x^k}\right) \quad (\text{D.1.28})$$

et

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^k \partial x^l}, \phi\right) = \left(T, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^l \partial x^k}\right) \quad (\text{D.1.29})$$

mais puisque  $\phi$  est  $C^\infty$ , ses dérivées partielles commutent; il en va donc de même des dérivées de  $T$ .

Il résulte de ces définitions, qu'une distribution de  $\mathcal{D}'$  est indéfiniment dérivable. En particulier, toute fonction localement intégrable est indéfiniment dérivable au sens des distributions.

## Exemples

1) Soit

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases} \quad (\text{D.1.30})$$

la fonction de Heaviside (qui est localement intégrable). Montrons, qu'au sens des distributions,

$$\theta' = \delta. \quad (\text{D.1.31})$$

En effet

$$(\theta', \phi) = -(\theta, \phi') = -\int_{\mathcal{R}} dx \theta(x) \phi'(x) = -\int_0^{\infty} dx \phi'(x) = \phi(0) = (\delta, \phi). \quad (\text{D.1.32})$$

2) si  $\mathcal{P}$  désigne la valeur principale de Cauchy,

$$\ln'|x| = \mathcal{P} \frac{1}{x} \quad (\text{D.1.33})$$

$$(\ln'|x|, \phi(x)) = -(\ln|x|, \phi'(x)) \quad (\text{D.1.34})$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} dx \ln|x| \phi'(x) \quad (\text{D.1.35})$$

$$= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{+\infty} \right] dx \ln|x| \phi'(x) \quad (\text{D.1.36})$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{+\infty} \right] dx \frac{\phi(x)}{x} \quad (\text{D.1.37})$$

$$= \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\phi(x)}{x}. \quad (\text{D.1.38})$$

3) On définit

$$\ln(x + i0) = \lim_{y \rightarrow 0} \ln(x + iy) = \lim_{y \rightarrow 0} (\ln|x + iy| + i \arg(x + iy)) \quad (\text{D.1.39})$$

$$= \ln|x| + i\pi\theta(-x). \quad (\text{D.1.40})$$

Alors

$$\frac{d}{dx} \ln(x + i0) = \frac{1}{x + i0} = \mathcal{P} \frac{1}{x} - i\pi\delta(x). \quad (\text{D.1.41})$$

4) Dans  $\mathbb{R}^3$ , avec  $r = |\bar{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta^3(\bar{x}). \quad (\text{D.1.42})$$

$$\left(\Delta \frac{1}{r}, \phi(\bar{x})\right) = \left(\frac{1}{r}, \Delta\phi\right) \quad (\text{D.1.43})$$

$$= \int_{\mathcal{R}^3} d^3x \frac{1}{r} \Delta\phi \quad (\text{D.1.44})$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3 - B_\epsilon} d^3x \frac{1}{r} \Delta\phi. \quad (\text{D.1.45})$$

Mais puisque le laplacien de  $\frac{1}{r}$  est nul en dehors de l'origine, la dernière intégrale est encore égale à

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{V_\epsilon} d^3x \left(\frac{1}{r} \Delta\phi - \phi \Delta \frac{1}{r}\right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{V_\epsilon} d^3x \partial_k \left(\frac{1}{r} \partial_k \phi - \phi \partial_k \frac{1}{r}\right) \quad (\text{D.1.46})$$

$$= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} d\bar{S} \cdot \left(\frac{1}{r} \bar{\nabla} \phi - \phi \bar{\nabla} \frac{1}{r}\right) \quad (\text{D.1.47})$$

$$= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} d\Omega \phi$$

$$= -4\pi\phi(0,0,0)$$

$$= -4\pi(\delta^3(\bar{x}), \phi(\bar{x})). \quad (\text{D.1.48})$$

5) Dans  $\mathbb{R}$ ,  $\Delta|x| = 2\delta$ . Dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Delta \ln r = 2\pi\delta$ .

### D.1.5 Multiplication des distributions.

La multiplication  $ST$  de deux distributions arbitraires n'est en général pas possible. Par exemple, si  $f$  est localement sommable, elle définit une distribution, mais  $f^2$  n'a aucune raison d'être aussi localement sommable et, en général, elle ne définit pas une distribution. Pour que le produit ait une chance de pouvoir être défini, plus  $T$  est singulière, plus  $S$  doit être régulière. Nous nous contenterons de définir le produit lorsque l'une,  $T$ , est arbitraire et l'autre une fonction  $\alpha \in C^\infty$ . Dans ce cas, le produit  $\alpha T$  existe et est défini par

$$(\alpha T, \phi) = (T, \alpha\phi). \quad (\text{D.1.49})$$

### Exemples

1)  $(\alpha\delta, \phi) = (\delta, \alpha\phi) = \alpha(0)\phi(0) = (\alpha(0)\delta, \phi)$ , d'où

$$\alpha\delta = \alpha(0)\delta. \quad (\text{D.1.50})$$

En particulier,

$$x\delta = 0. \quad (\text{D.1.51})$$

2)  $(\alpha\delta', \phi) = (\delta', \alpha\phi) = -(\alpha\phi)'(0)$  d'où,

$$\alpha\delta' = \alpha(0)\delta' - \alpha'(0)\delta. \quad (\text{D.1.52})$$

En particulier,

$$x\delta' = -\delta \quad (\text{D.1.53})$$

mais aussi

$$x^2\delta' = 0. \quad (\text{D.1.54})$$

3) Pour qu'une distribution  $T$  sur  $\mathcal{R}$  vérifie

$$xT = 0, \quad (\text{D.1.55})$$

il faut et il suffit que  $T$  soit proportionnelle à  $\delta$ :

$$T = C\delta. \quad (\text{D.1.56})$$

où  $C$  est une constante. Autrement dit,  $\delta$  est, à un facteur constant près, l'unique "vecteur propre" de l'opérateur de multiplication par  $x$ , de "valeur propre"  $\lambda = 0$ . Puisqu'on a déjà prouvé que  $x\delta = 0$ , il ne reste que la réciproque à démontrer. Si  $T$  vérifie  $xT = 0$ , on a

$$(xT, \phi) = (T, x\phi) = 0. \quad (\text{D.1.57})$$

Donc,  $T$  est nul sur toute fonction de  $\mathcal{D}$  de la forme  $x\phi$ , avec  $\phi$  dans  $\mathcal{D}$ ; or, cet ensemble de fonctions coïncide avec les fonctions  $\chi$  de  $\mathcal{D}$  qui s'annulent en 0,  $\chi(0) = 0$ . Soit alors  $\theta$  une fonction fixe de  $\mathcal{D}$  telle que  $\theta(0) = 1$ . On a, pour toute fonction  $\psi$  de  $\mathcal{D}$ :

$$\psi = \lambda\theta + \chi \quad (\text{D.1.58})$$

avec  $\lambda = \psi(0)$  et  $\chi(0) = 0$ . On en déduit,

$$(T, \psi) = (T, \lambda\theta + \chi) = (T, \lambda\theta) = \lambda(T, \theta) \quad (\text{D.1.59})$$

ou

$$(T, \psi) = \psi(0)C \quad (\text{D.1.60})$$

avec  $C = (T, \theta)$ , ce qui donne bien  $T = C\delta$ .

4) On a toujours la règle de Leibniz:  $(\alpha T)' = \alpha'T + \alpha T'$

## D.1.6 Convolution de distributions

### Produit tensoriel de distributions

Si  $S_x$  est une distribution de  $\mathcal{D}'_x$  et si  $T_y$  est une distribution de  $\mathcal{D}'_y$ , il existe une distribution  $W_{x,y}$  dans  $\mathcal{D}'_{x,y}$ , bien déterminée et unique telle que pour les fonctions  $\phi$  de  $\mathcal{D}_{x,y}$  qui sont de la forme  $\phi(x,y) = u(x)v(y)$ , avec  $u(x)$  dans  $\mathcal{D}_x$  et  $v(y)$  dans  $\mathcal{D}_y$ , on a

$$(W_{x,y}, u(x)v(y)) = (S_x, u(x))(T_y, v(y)), \quad (\text{D.1.61})$$

$W_{x,y}$  est le produit tensoriel de  $S_x$  par  $T_y$  il est noté

$$W = S \otimes T. \quad (\text{D.1.62})$$

Pour  $\phi(x,y)$  quelconque dans  $\mathcal{D}_{x,y}$ ,  $(W, \phi)$  se calcule de la façon suivante: a) d'abord on fixe  $x$ ; alors  $\phi(x,y)$  comme fonction de  $y$  est dans  $\mathcal{D}_y$  et l'opération suivante

$$\psi(x) = (T_y, \phi(x,y)) \quad (\text{D.1.63})$$

définit une fonction  $\psi(x)$  qui est dans  $\mathcal{D}_x$ ; b) on peut alors former

$$(S_x, \psi(x)) = (S_x, (T_y, \phi(x,y))) \quad (\text{D.1.64})$$

qui, par définition sera  $(W, \phi)$ . Il vient donc

$$(W, \phi) = (S_x, (T_y, \phi)). \quad (\text{D.1.65})$$

L'ordre des opérations peut être renversé

$$W = S \otimes T = T \otimes S, \quad (\text{D.1.66})$$

le produit tensoriel de deux distributions est donc commutatif. Le support de  $W$  est le produit cartésien des supports de  $S$  et de  $T$ . La définition ci-dessus s'étend au produit tensoriel de plusieurs distributions. Ce produit est associatif.

Exemple:  $\delta_x \otimes \delta_y = \delta_{x,y}$ .

### Produit de convolution

La convolution des distributions  $S$  et  $T$  de  $\mathcal{D}'$  est une nouvelle distribution de  $\mathcal{D}'$  définie par

$$(S \star T, \phi) = (S_\xi \otimes T_\eta, \phi(\xi + \eta)). \quad (\text{D.1.67})$$

Le produit de convolution n'est pas toujours bien défini; en effet, la fonction  $\phi(\xi + \eta)$  n'est pas dans  $\mathcal{D}_{\xi,\eta}$ : son support est une bande parallèle à la droite  $\xi + \eta = 0$  qui n'est pas un compact du plan  $(\xi, \eta)$ . De ce fait, le produit de convolution  $S \star T$  n'existe que si les supports de  $S$  et/ou  $T$  sont tels que leur intersection avec le support de  $\phi$  est compact. Une condition suffisante pour l'existence du produit de convolution est que  $S$  ou  $T$  soit à support borné. Si  $S \star T$  existe,  $T \star S$  existe, et  $S \star T = T \star S$ .

#### Exemples

1) Si  $S$  et  $T$  sont des fonctions localement intégrables dont l'une est à support borné, leur produit de convolution définit une fonction localement intégrable par

$$h(x) = \int dt f(x-t)g(t) = \int dt g(x-t)f(t). \quad (\text{D.1.68})$$

2) La distribution  $\delta$  est le neutre pour le produit de convolution

$$\delta \star T = T. \quad (\text{D.1.69})$$

En effet

$$(\delta \star T, \phi) = (\delta_\xi, (T_\eta, \phi(\xi + \eta))) = (T_\eta, \phi(\eta)). \quad (\text{D.1.70})$$

- 3)  $\delta_a \star T = \tau_a T$ ,  $\delta_a \star \delta_b = \delta_{a+b}$ .  
 4)  $\delta' \star T = T'$ . En effet,

$$(\delta' \star T, \phi) = (T_\eta, (\delta'_\xi, \phi(\xi + \eta))) = -(T_\eta, \phi'(\eta)). \quad (\text{D.1.71})$$

5) Il en résulte que la dérivée d'un produit de convolution s'obtient en ne dérivant que l'un des facteurs:

$$(S \star T)' = S' \star T = S \star T'. \quad (\text{D.1.72})$$

En effet

$$(S \star T)' = \delta' \star (S \star T) = (\delta' \star S) \star T = S \star (\delta' \star T). \quad (\text{D.1.73})$$

### Equation de Poisson dans $\mathcal{R}^3$

Nous avons vu précédemment que  $\Delta \frac{1}{|\bar{x}|} = -4\pi\delta^3(\bar{x})$ . Dès lors, il est possible de construire une solution particulière de l'équation de Poisson

$$\Delta\phi(\bar{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\bar{x}) \quad (\text{D.1.74})$$

pour toute distribution de charge  $\rho(\bar{x})$  à support borné, par la convolution suivante:

$$\phi(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\bar{x}|} \star \rho(\bar{x}). \quad (\text{D.1.75})$$

C'est la solution de l'équation de Poisson qui s'annule pour  $|\bar{x}| \rightarrow \infty$ . En effet, le laplacien du produit de convolution est

$$\Delta\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Delta \frac{1}{|\bar{x}|} \star \rho(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (-4\pi\delta^3) \star \rho(\bar{x}) \quad (\text{D.1.76})$$

qui est bien égal au membre de droite de l'équation de Poisson, puisque  $\delta$  est le neutre pour le produit de convolution.

## D.2 Distributions Tempérées

### D.2.1 Définitions.

L'espace vectoriel de fonctions test sur lequel sont définies les distributions tempérées est l'espace  $\mathcal{S}$  des fonctions  $C^\infty$  à décroissance rapide, c'est-à-dire telles que pour tout couple de nombres entiers positifs,  $k, l$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^k \frac{d^l}{dx^l} \phi(x) = 0. \quad (\text{D.2.77})$$

Les fonctions de  $\mathcal{S}$  et leurs dérivées décroissent plus rapidement à l'infini que  $|x|^{-k}$ , si grand soit  $k$ .

Exemple

Dans l'espace  $\mathcal{S}$  sur  $\mathcal{R}^n$ , on trouve toutes les fonctions du type

$$p(x^1, \dots, x^n) e^{-\frac{(x^1)^2}{(a^1)^2}} \dots e^{-\frac{(x^n)^2}{(a^n)^2}}, \quad (\text{D.2.78})$$

où  $p$  désigne un polynôme quelconque.

Dans l'espace  $\mathcal{S}$ , on dit que la suite  $\phi_n$  converge vers zéro si toutes les suites  $x^k \frac{d^k}{dx^k} \phi_n$  convergent uniformément vers zéro; de même, on dit que la suite  $\phi_n$  converge vers  $\phi$  dans  $\mathcal{S}$  si la suite  $\phi_n - \phi$  converge vers zéro.

Par définition, une distribution tempérée est une fonctionnelle linéaire continue sur  $\mathcal{S}$ . L'ensemble des distributions tempérées muni d'une structure d'espace vectoriel est noté  $\mathcal{S}'$ , c'est le dual topologique de  $\mathcal{S}$ ; il est contenu dans  $\mathcal{S}^*$ .

Puisque  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ , on a l'inclusion opposée pour les espaces duaux,  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ . La fonction  $e^x$  par exemple est une distribution de  $\mathcal{D}'$ , elle n'est pas dans  $\mathcal{S}'$ . On peut voir qu'une fonction  $f$  sommable définit par

$$(f, \phi) = \int dx f(x) \phi(x) \quad (\text{D.2.79})$$

une distribution tempérée; une fonction  $f$  bornée est tempérée; une distribution à support borné est tempérée,...

### D.2.2 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$

Soit  $\phi(x)$  une fonction de  $\mathcal{S}$ ; on appelle transformée de Fourier de  $f$  la fonction  $\tilde{f}$  définie par

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ipx} f(x). \quad (\text{D.2.80})$$

On démontre que i)  $\tilde{f}$  est aussi une fonction  $C^\infty$  à décroissance rapide, c'est-à-dire que  $\tilde{f} \in \mathcal{S}_p$  et ii) que la correspondance  $f \rightarrow \tilde{f}$  est bijective et que

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{ipx} \tilde{f}(p). \quad (\text{D.2.81})$$

### D.2.3 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$

Soit  $T$  une distribution tempérée; on définit une nouvelle distribution tempérée  $\tilde{T}$ , transformée de Fourier de  $T$ , par l'égalité suivante

$$(\tilde{T}, \phi) = (T, \tilde{\phi}). \quad (\text{D.2.82})$$

La correspondance  $T \rightarrow \tilde{T}$  est également biunivoque. La transformation de Fourier définit donc i) un isomorphisme entre  $\mathcal{S}_x$  et  $\mathcal{S}_p$  et ii) un isomorphisme entre  $\mathcal{S}'_x$  et  $\mathcal{S}'_p$ .

En utilisant la notation intégrale formelle, cette définition corespond à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp \tilde{T}(p) \phi(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx T(x) \tilde{\phi}(x) \quad (\text{D.2.83})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx T(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-ipx} \phi(p) \quad (\text{D.2.84})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dp \phi(p) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx T(x) e^{-ipx} \quad (\text{D.2.85})$$

d'où on tire

$$\tilde{T}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx T(x) e^{-ipx}. \quad (\text{D.2.86})$$

### Exemples

1) La transformée de Fourier de  $\delta$  est la distribution  $\tilde{\delta}$  définie par

$$(\tilde{\delta}, \phi) = (\delta, \tilde{\phi}) = \tilde{\phi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \phi(x) \quad (\text{D.2.87})$$

donc,

$$\tilde{\delta}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (\text{D.2.88})$$

2) Inversément, en prenant la transformée de Fourier de la distribution  $T = 1$ , on obtient la relation formelle

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{ipx} = \delta(x). \quad (\text{D.2.89})$$

3)  $\tilde{\delta}_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iax}$ . En effet,

$$(\tilde{\delta}_a, \phi) = (\delta_a, \tilde{\phi}) = \tilde{\phi}(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-iax} \phi(x). \quad (\text{D.2.90})$$

4)  $\tilde{\theta}(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{x-i0}$ . En effet

$$(\tilde{\theta}, \phi) = (\theta, \tilde{\phi}) \quad (\text{D.2.91})$$

$$= \int_0^{\infty} dp \tilde{\phi}(p) \quad (\text{D.2.92})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ipx} \phi(x) \quad (\text{D.2.93})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \phi(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dp e^{-ipx} \quad (\text{D.2.94})$$

l'intégrale sur  $p$  étant limitée à l'axe réel positif, le remplacement de  $x$  par  $x - i0$  introduit un facteur de convergence (exponentielle décroissante) qui lui donne un sens et

$$\int_0^{\infty} dp e^{-ip(x-i0)} = \frac{1}{i(x-i0)}. \quad (\text{D.2.95})$$



#### D.2.4 Transformation de Fourier dans $L^2$ .

Si  $f$  est une fonction de  $L_x^2$ , à valeurs complexes, l'intégrale suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx |f(x)|^2 \quad (\text{D.2.96})$$

existe. Sa transformée de Fourier existe et est aussi dans  $L_p^2$ , de plus, on a la formule de Parseval-Plancherel,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dp |\tilde{f}(p)|^2. \quad (\text{D.2.97})$$

En effet,

$$\int dx |f(x)|^2 = \int dx f^*(x) f(x) \quad (\text{D.2.98})$$

$$= \int dx f^*(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp e^{ipx} \tilde{f}(p) \quad (\text{D.2.99})$$

$$= \int dp \tilde{f}(p) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx f^*(x) e^{ipx} \quad (\text{D.2.100})$$

$$= \int dp \tilde{f}(p) (\tilde{f}(p))^*. \quad (\text{D.2.101})$$

## Annexe E

# Polynômes de Legendre

### E.1 Fonction génératrice.

La fonction

$$G(x, \mu) = (1 + x^2 - 2x\mu)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{E.1.1})$$

admet, pour  $|x| < 1$  et  $-1 \leq \mu \leq 1$ , un développement en puissances de  $x$ , dont les coefficients sont des polynômes de degré  $\ell$  en la variable  $\mu$ :

$$G(x, \mu) = \sum_{\ell=0}^{\infty} x^{\ell} P_{\ell}(\mu). \quad (\text{E.1.2})$$

Par définition, les  $P_{\ell}$  sont les polynômes de Legendre;  $G$  est la fonction génératrice des polynômes de Legendre. On en déduit que

$$\ell! P_{\ell}(\mu) = \left. \frac{\partial^{\ell} G(x, \mu)}{\partial x^{\ell}} \right|_{x=0} \quad (\text{E.1.3})$$

d'où, pour  $\ell = 0$  et  $\ell = 1$ ,

$$P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \mu. \quad (\text{E.1.4})$$

Pour  $\mu = 1$ ,  $G(x, 1) = (1-x)^{-1}$ ; la série ci-dessus se réduit donc à la série géométrique. On en tire que

$$P_{\ell}(1) = 1. \quad (\text{E.1.5})$$

De plus, de l'égalité  $G(x, \mu) = G(-x, -\mu)$ , on tire

$$P_{\ell}(-\mu) = (-1)^{\ell} P_{\ell}(\mu). \quad (\text{E.1.6})$$

### E.2 Formule de récurrence.

La dérivée par rapport à la variable  $x$  de  $G$  fournit l'égalité

$$\frac{\partial G(x, \mu)}{\partial x} = \frac{1}{2}(1 + x^2 - 2x\mu)^{-\frac{3}{2}}(-2x + 2\mu) = G(x, \mu) \frac{\mu - x}{1 + x^2 - 2x\mu} \quad (\text{E.2.7})$$

ou

$$(1 + x^2 - 2x\mu) \frac{\partial G(x, \mu)}{\partial x} = (\mu - x) G(x, \mu). \quad (\text{E.2.8})$$

En remplaçant, dans les deux membres  $G$  par son développement en série, puis en égalant les coefficients des mêmes puissances de  $x$  des deux membres, on obtient la relation de récurrence suivante, pour  $n = 1, 2, \dots$ ,

$$(n + 1)P_{n+1} + nP_{n-1} - (2n + 1)\mu P_n = 0 \quad (\text{E.2.9})$$

qui fournit le polynôme  $P_{n+1}$  en fonction de  $P_n$  et  $P_{n-1}$ ; connaissant  $P_0$  et  $P_1$ , on en tire, pour  $n = 1, P_2$ , puis, pour  $n = 2, P_3, \dots$  et ainsi de suite, tous les polynômes de Legendre.

Les premiers polynômes de Legendre sont donnés par

$$P_0 = 1 \quad (\text{E.2.10})$$

$$P_1 = \mu \quad (\text{E.2.11})$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1) \quad (\text{E.2.12})$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu) \quad (\text{E.2.13})$$

### E.3 Equation différentielle.

De la forme explicite de la fonction  $G$ , on tire, l'égalité suivante

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial G(x, \mu)}{\partial \mu} \right] = -x \frac{\partial^2}{\partial x^2} [xG(x, \mu)] \quad (\text{E.3.14})$$

On en déduit, en remplaçant  $G$  par son développement (2) puis en égalant les coefficients des mêmes puissances de  $x$  dans les deux membres

$$\frac{d}{d\mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{dP_\ell(\mu)}{d\mu} \right] = -\ell(\ell + 1) P_\ell(\mu). \quad (\text{E.3.15})$$

Le polynôme  $P_\ell$  est donc solution d'une équation différentielle du second ordre; ce n'est pas la solution générale de cette équation, mais une solution particulière: en fait,  $P_\ell$  est la solution de l'équation

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 f(\mu)}{d\mu^2} - 2\mu \frac{df(\mu)}{d\mu} + \ell(\ell + 1)f(\mu) = 0, \quad (\text{E.3.16})$$

régulière en  $\mu = \pm 1$ .

La solution générale de l'équation différentielle, pour  $\ell = 0$  est donnée par

$$f(\mu) = c_1 \ln \sqrt{\frac{1 + \mu}{1 - \mu}} + c_0. \quad (\text{E.3.17})$$

Mise sous sa forme canonique,

$$\frac{d^2 f}{d\mu^2} + p(\mu) \frac{df}{d\mu} + q(\mu)f = 0, \quad (\text{E.3.18})$$

l'équation de Legendre prend la forme

$$\frac{d^2 f(\mu)}{d\mu^2} - \frac{2\mu}{1-\mu^2} \frac{df(\mu)}{d\mu} + \frac{\ell(\ell+1)}{1-\mu^2} f(\mu) = 0. \quad (\text{E.3.19})$$

De la théorie générale des équations du second ordre, il résulte que, puisque le coefficient de la dérivée première,

$$p(\mu) = -\frac{2\mu}{1-\mu^2}, \quad (\text{E.3.20})$$

et le coefficient du terme sans dérivée,

$$q(\mu) = \frac{\ell(\ell+1)}{1-\mu^2}, \quad (\text{E.3.21})$$

sont des fonctions analytiques de  $\mu$  dans tout le plan complexe, à l'exception des points  $\mu = \pm 1$  où elles ont des pôles simples, la solution générale est analytique dans le cercle  $|\mu| < 1$  mais est singulière en  $\mu = \pm 1$ . On peut donc chercher la solution de l'équation sous la forme d'une série de puissances de  $\mu$ , soit

$$f(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mu^n \quad (\text{E.3.22})$$

dont les coefficients doivent être déterminés de façon à satisfaire l'équation. En remplaçant dans l'équation  $f(\mu)$  par son développement en série, et en égalant à zéro les coefficients de toutes les puissances de  $\mu$ , on obtient les relations de récurrence suivantes pour les coefficients  $c_n$ :

$$(n+2)(n+1) c_{n+2} = [n(n+1) - \ell(\ell+1)] c_n. \quad (\text{E.3.23})$$

Ces relations définissent tous les  $c_{2n}$  à partir de  $c_0$ :

$$c_2 = c_0 \frac{-\ell(\ell+1)}{2} \quad (\text{E.3.24})$$

$$c_4 = c_2 \frac{6 - \ell(\ell+1)}{12} \quad (\text{E.3.25})$$

$$c_6 = c_4 \frac{20 - \ell(\ell+1)}{30} \quad (\text{E.3.26})$$

$$\dots = \dots \quad (\text{E.3.27})$$

et tous les  $c_{2n+1}$  à partir de  $c_1$ :

$$c_3 = c_1 \frac{2 - \ell(\ell+1)}{6} \quad (\text{E.3.28})$$

$$c_5 = c_3 \frac{12 - \ell(\ell+1)}{20} \quad (\text{E.3.29})$$

$$\dots = \dots \quad (\text{E.3.30})$$

$c_0$  et  $c_1$  sont deux constantes arbitraires. Ici,  $\ell$  est un entier non négatif donné; si  $\ell$  est pair (respectivement impair), la suite des coefficients pairs (respectivement impairs) est limitée, c'est-à-dire que

$$c_{\ell+2} = c_\ell \frac{\ell(\ell+1) - \ell(\ell+1)}{(\ell+1)(\ell+2)} = 0 \quad (\text{E.3.31})$$

et tous les suivants sont nuls. On en déduit donc, que pour tout  $\ell = 0, 1, 2, \dots$ , l'équation de Legendre admet une solution particulière qui est un polynôme de degré  $\ell$ . Ce polynôme a la parité de  $\ell$ . Si on fixe la constante  $c_0$  (respectivement  $c_1$ ) de sorte que ce polynôme prenne la valeur 1 en  $\mu = 1$ , la solution polynômiale de l'équation coïncide avec le polynôme de Legendre  $P_\ell(\mu)$ . On le vérifie aisément pour les premiers:

- a) pour  $\ell = 0$ , la solution est  $c_0$  et la condition de normalisation impose  $c_0 = 1$ .
- b) pour  $\ell = 1$ , la solution est  $c_1\mu$  et la condition de normalisation impose  $c_1 = 1$ .
- c) pour  $\ell = 2$ , la solution est  $c_0 + c_2\mu^2$  avec  $c_2 = c_0(-)\frac{6}{2}$  et la normalisation impose  $c_0 = -\frac{1}{2}$ .
- d) pour  $\ell = 3$ , la solution est  $c_1\mu + c_3\mu^3$  avec  $c_3 = c_1(-)\frac{10}{6}$  et la normalisation fixe  $c_1 = -\frac{3}{2}$ .

## E.4 Formule de Rodrigues

Les relations entre les coefficients d'un polynôme de Legendre permettent d'établir la formule de Rodrigues, qui permet de calculer les polynômes de Legendre par:

$$P_\ell(\mu) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{d\mu^\ell} (\mu^2 - 1)^\ell. \quad (\text{E.4.32})$$

En effet, ceci définit bien un polynôme de degré  $\ell$  et de parité  $(-1)^\ell$ . On peut établir, à partir de la formule du binôme de Newton que le rapport des coefficients successifs est le même que celui qui est donné par les relations de récurrences. De plus, en  $\mu = 1$ ,

$$\frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{d\mu^\ell} (\mu^2 - 1)^\ell \Big|_{\mu=1} = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{d\mu^\ell} [(\mu - 1)^\ell (\mu + 1)^\ell] \Big|_{\mu=1} = \frac{1}{2^\ell \ell!} \left[ \frac{d^\ell}{d\mu^\ell} (\mu - 1)^\ell \right] \Big|_{\mu=1} 2^\ell = 1. \quad (\text{E.4.33})$$

## E.5 Orthogonalité

Nous allons établir ici les relations d'orthogonalité suivantes:

$$\int_{-1}^1 d\mu P_\ell(\mu) P_{\ell'}(\mu) = \frac{2}{(2\ell + 1)} \delta_{\ell\ell'}. \quad (\text{E.5.34})$$

Considérons d'abord le cas  $\ell \neq \ell'$ . Les polynômes  $P_\ell, P_{\ell'}$  obéissent aux équations

$$\frac{d}{d\mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{dP_\ell(\mu)}{d\mu} \right] = -\ell(\ell + 1) P_\ell(\mu) \quad (\text{E.5.35})$$

et

$$\frac{d}{d\mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{dP_{\ell'}(\mu)}{d\mu} \right] = -\ell'(\ell' + 1) P_{\ell'}(\mu). \quad (\text{E.5.36})$$

En multipliant la première par  $P_{\ell'}$ , la seconde par  $P_\ell$ , en soustrayant membre à membre les expressions ainsi obtenues, puis en intégrant les deux membres par rapport à  $\mu$  sur l'intervalle  $-1 \leq \mu \leq 1$ , il vient

$$\int_{-1}^1 d\mu \left\{ P_{\ell'} \frac{d}{d\mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{dP_\ell}{d\mu} \right] - P_\ell \frac{d}{d\mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{dP_{\ell'}}{d\mu} \right] \right\} \quad (\text{E.5.37})$$

$$= [\ell'(\ell' + 1) - \ell(\ell + 1)] \int_{-1}^1 d\mu P_\ell P_{\ell'}. \quad (\text{E.5.38})$$

Par la formule d'intégration par parties, utilisée dans chacun des termes du membre de gauche, il apparaît que le membre de gauche est nul. Le membre de droite est donc nul aussi; mais puisque  $\ell \neq \ell'$  c'est bien l'intégrale qui vaut zéro.

Pour  $\ell = \ell'$ , l'intégrale

$$\int_{-1}^1 d\mu [P_\ell]^2 \quad (\text{E.5.39})$$

se calcule en utilisant pour les  $P_\ell$  la formule de Rodrigues. En faisant passer toutes les dérivées sur un seul facteur, en utilisant  $\ell$  fois la formule d'intégration par parties, il vient

$$\frac{1}{2^{2\ell}(\ell!)^2} (-1)^\ell \int_{-1}^1 d\mu (\mu^2 - 1)^\ell \frac{d^{2\ell}}{d\mu^{2\ell}} (\mu^2 - 1)^\ell \quad (\text{E.5.40})$$

$$= \frac{1}{2^{2\ell}(\ell!)^2} (2\ell)! \int_{-1}^1 d\mu (1 - \mu)^\ell (1 + \mu)^\ell \quad (\text{E.5.41})$$

Par le changement de variable d'intégration  $\nu = \frac{1+\mu}{2}$ ,  $0 \leq \nu \leq 1$ ,  $d\mu = 2d\nu$ ,  $(1+\mu)^\ell = 2^\ell \nu^\ell$ ,  $(1-\mu)^\ell = 2^\ell (1-\nu)^\ell$  l'intégrale ci-dessus devient

$$2(2^\ell)^2 \int_0^1 d\nu \nu^\ell (1-\nu)^\ell = 2(2^\ell)^2 B(\ell+1, \ell+1) = 2(2^\ell)^2 \frac{\Gamma^2(\ell+1)}{\Gamma(2\ell+2)} = 2(2^\ell)^2 \frac{\ell! \ell!}{(2\ell+1)!}. \quad (\text{E.5.42})$$

Ceci fournit le résultat annoncé. Les fonctions  $B$  et  $\Gamma$  sont les fonctions d'Euler.

## E.6 Complétude

En vertu du théorème de Weierstrass, les polynômes de Legendre forment un système complet de fonctions (orthogonales) pour les fonctions continues sur le segment  $-1 \leq \mu \leq 1$ . C'est-à-dire que toute fonction  $f$  de cette classe est développable en série

$$f(\mu) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell P_\ell(\mu) \quad (\text{E.6.43})$$

avec

$$c_\ell = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 d\mu f(\mu) P_\ell(\mu). \quad (\text{E.6.44})$$

Cette propriété s'étend aux fonctions  $f$  de  $L^2[-1,1]$  qui sont régulières en  $\mu = \pm 1$ ; dans ce cas, la série converge vers  $f$  en moyenne quadratique.

## E.7 Problème aux valeurs propres

L'équation de Legendre peut s'interpréter de la façon suivante: le polynôme de Legendre  $P_\ell$  est la fonction propre de l'opérateur linéaire

$$D = -\frac{d}{d\mu} \left[ (1-\mu^2) \frac{d}{d\mu} \right] \quad (\text{E.7.45})$$

de valeur propre  $\ell(\ell+1)$ .

Sur l'espace des fonctions  $L^2[-1,1]$ , régulières en  $\mu = \pm 1$ , muni du produit scalaire défini positif

$$(f, g) = \int_{-1}^1 d\mu f(\mu) g(\mu), \quad (\text{E.7.46})$$

l'opérateur  $D$  est autoadjoint, c'est-à-dire

$$(f, Dg) = (D^+ f, g) = (Df, g). \quad (\text{E.7.47})$$

Il en résulte que ses valeurs propres sont réelles, et que les fonctions propres associées à des valeurs propres distinctes sont orthogonales. Soit  $\lambda$  une valeur propre et  $f_\lambda$  la fonction propre correspondante:

$$D f_\lambda = \lambda f_\lambda. \quad (\text{E.7.48})$$

En multipliant les deux membres par  $f_\lambda$  puis en intégrant, il vient

$$\int_{-1}^1 d\mu f_\lambda D f_\lambda = \lambda (f_\lambda, f_\lambda) \quad (\text{E.7.49})$$

mais le premier membre s'écrit encore, après intégration par parties, et en tenant compte des conditions aux limites imposées à  $f_\lambda$ ,

$$= \int_{-1}^1 d\mu [\sqrt{1-\mu^2} \frac{df_\lambda}{d\mu}]^2 \quad (\text{E.7.50})$$

qui, comme on le voit est une quantité réelle non négative. On en tire donc que  $\lambda$  est réel, non négatif ( $\lambda \geq 0$ ). On convient d'écrire  $\lambda$  sous la forme commode pour la suite

$$\lambda = \ell(\ell + 1), \quad (\text{E.7.51})$$

avec, a priori,  $\ell$  réel et  $\ell \geq 0$ , et  $f_\lambda$  devient  $f_\ell$ . En vertu de la théorie générale des équations différentielles du second ordre, comme on l'a déjà fait précédemment, on peut rechercher la fonction propre  $f_\ell$  sous la forme

$$f_\ell(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{\ell, n} \mu^n. \quad (\text{E.7.52})$$

Une telle série est solution de l'équation si les  $c_{\ell, n}$  satisfont les relations de récurrence

$$(n+2)(n+1) c_{\ell, n+2} = [n(n+1) - \ell(\ell+1)] c_{\ell, n}. \quad (\text{E.7.53})$$

Il en résulte que

$$\frac{c_{\ell, n+2}}{c_{\ell, n}} = \frac{n(n+1) - \ell(\ell+1)}{(n+2)(n+1)} \quad (\text{E.7.54})$$

et donc, pour  $n$  très grand, ce rapport devient de l'ordre de  $\frac{n}{(n+2)}$ . Ce comportement asymptotique est le même que celui des coefficients des séries

$$\sum_{n=2N} \frac{1}{n} \mu^n, \quad \sum_{n=2N+1} \frac{1}{n} \mu^n \quad (\text{E.7.55})$$

qui, pour  $\mu = \pm 1$  sont des séries divergentes. On voit donc que si la série de  $f_\ell$  comporte une infinité de termes, la fonction  $f_\ell$  sera singulière en  $\mu = \pm 1$ . Or, la fonction propre  $f_\ell$  recherchée doit être régulière en  $\pm 1$ ; cette condition ne peut être satisfaite que si la série est limitée, c'est-à-dire, si tous les coefficients  $c_{\ell,n}$  sont nuls à partir d'un certain ordre. En revoyant la relation de récurrence, on constate que cette condition sera satisfaite pour  $\ell$  entier non négatif et  $f_\ell$  de parité  $(-1)^\ell$ , car dans ce cas, tous les coefficients de parité opposée à  $\ell$  sont nuls et, avec  $c_{\ell,\ell} \neq 0$ , on a bien  $c_{\ell,\ell+2} = 0$  ainsi que tous les suivants. La fonction  $f_\ell$  ainsi construite est donc un polynôme de degré  $\ell$  et de parité  $(-1)^\ell$ , qui, avec la condition de normalisation  $f_\ell(1) = 1$ , coïncide avec  $P_\ell$ .  $D$  admet donc comme valeurs propres les valeurs  $\ell(\ell+1)$  avec  $\ell = 0, 1, 2, \dots$  et les  $P_\ell$  sont les fonctions propres associées. Il n'y en a pas d'autres!

## E.8 Résolution de l'équation de Laplace.

La recherche de solutions de l'équation de Laplace, invariantes sous les rotations autour de l'axe  $\vec{I}_z$  ( $\varphi \rightarrow \varphi + \alpha$ ,  $\alpha$  arbitraire), c'est-à-dire de solutions  $f(r, \theta)$  de

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right] = 0 \quad (\text{E.8.56})$$

telles que

$$\int_0^\infty r^2 dr \int_{-1}^1 d\cos \theta |f(r, \theta)|^2 < \infty \quad (\text{E.8.57})$$

se ramène à la recherche des solutions de la forme

$$f(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell(r) P_\ell(\cos \theta). \quad (\text{E.8.58})$$

Par la technique appliquée précédemment, on montre que de telles solutions existent

a) pour  $0 < r < \infty$  à la condition que

$$c_\ell(r) = A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-\ell-1} \quad (\text{E.8.59})$$

où  $A_\ell, B_\ell$  sont des constantes arbitraires,

b) pour  $0 \leq r < \infty$ , à la condition que

$$c_\ell(r) = A_\ell r^\ell \quad (\text{E.8.60})$$

c) pour  $0 < r \leq \infty$  à la condition que

$$c_\ell(r) = A_\ell \delta_{\ell,0} + B_\ell r^{-\ell-1}. \quad (\text{E.8.61})$$

Ainsi, la solution générale à symétrie azimuthale de l'équation de Laplace est,

a) pour  $0 < r < \infty$ ,

$$f(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} [A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-\ell-1}] P_\ell(\cos \theta) \quad (\text{E.8.62})$$

b) pour  $0 \leq r < \infty$ ,

$$f(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell r^\ell P_\ell(\cos \theta) \quad (\text{E.8.63})$$



c) pour  $0 < r \leq \infty$ ,

$$f(r,\theta) = A_0 + \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{\ell} r^{-\ell-1} P_{\ell}(\cos\theta). \quad (\text{E.8.64})$$

Dans chacun des cas, les constantes arbitraires peuvent être fixées par la donnée de la solution ou de sa dérivée normale sur une surface fermée.

## Annexe F

# Fonctions de Laplace ou Harmoniques sphériques

### F.1 Définitions

Les fonctions de Laplace ou harmoniques sphériques  $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ , pour  $\ell = 0, 1, 2, \dots$  et  $m = \ell, \ell - 1, \dots, -\ell + 1, -\ell$  sont des fonctions à valeurs complexes définies sur la sphère de rayon 1, pour  $0 \leq \theta \leq \pi$  et  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Dans l'espace des fonctions  $L^2$  sur la sphère, muni du produit scalaire hermitien

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\cos\theta f^*(\theta, \varphi) g(\theta, \varphi), \quad (\text{F.1.1})$$

elles forment un système complet orthonormé de fonctions

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\cos\theta Y_\ell^{*m}(\theta, \varphi) Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \varphi) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (\text{F.1.2})$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \varphi) Y_l^{*m}(\theta', \varphi') = \delta(\cos\theta - \cos\theta') \delta(\varphi - \varphi'). \quad (\text{F.1.3})$$

Toute fonction  $f$  de carré sommable sur la sphère peut être décomposée en

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} c_{\ell, m} Y_\ell^m(\theta, \varphi) \quad (\text{F.1.4})$$

avec

$$c_{\ell, m} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\cos\theta Y_\ell^{*m}(\theta, \varphi) f(\theta, \varphi) \quad (\text{F.1.5})$$

La série converge vers  $f$  en moyenne quadratique.

### F.2 Equations différentielles.

Les fonctions  $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$  sont les fonctions propres simultanées de deux opérateurs linéaires autoadjoints qui commutent entre eux

$$\hat{L}^2 Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \ell(\ell + 1) Y_\ell^m(\theta, \varphi) \quad (\text{F.2.6})$$

$$\hat{L}_z Y_\ell^m(\theta, \varphi) = m Y_\ell^m(\theta, \varphi) \quad (\text{F.2.7})$$

où

$$\hat{L}^2 = -\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left[ \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right] - \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \quad (\text{F.2.8})$$

est, au signe près, le laplacien sur la sphère et

$$\hat{L}_z = -i \frac{\partial}{\partial\varphi}. \quad (\text{F.2.9})$$

La seconde équation fixe la dépendance en  $\varphi$  de la fonction  $Y_\ell^m$ , à savoir

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = f_\ell^m(\theta) e^{im\varphi} \quad (\text{F.2.10})$$

tandis que la première équation lui impose encore de satisfaire l'équation différentielle du second ordre suivante

$$-\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin\theta \frac{df_\ell^m}{d\theta} \right] + \frac{m^2}{\sin^2\theta} f_\ell^m = \ell(\ell+1) f_\ell^m. \quad (\text{F.2.11})$$

La fonction  $e^{im\varphi}$  appartient au domaine d'hermiticité de  $L_z$  à la condition que

$$e^{im\varphi} = e^{im(\varphi+2\pi)} \quad (\text{F.2.12})$$

c'est-à-dire pour  $m$  entier. On vérifie aisément que, avec  $\cos\theta = \mu$  et pour  $m = 0$ , l'équation (F.2.11) se réduit à l'équation de Legendre. Pour  $m$  entier, fixé, on montre, en appliquant la technique développée précédemment, que l'équation (F.2.11) n'admet de solutions régulières en  $\mu = \pm 1$  que pour  $\ell = 0, 1, 2, \dots$  et  $m = \ell, \ell-1, \dots, -\ell$ . Les fonctions propres  $f_\ell^m$  correspondantes sont les fonctions de Legendre associées  $f_\ell^m = P_\ell^m$ ; la formule de Rodrigues permet de les calculer par

$$P_\ell^m(\mu) = \frac{1}{2^\ell \ell!} (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{\ell+m}}{d\mu^{\ell+m}} (\mu^2-1)^\ell \quad (\text{F.2.13})$$

elles sont normalisées de sorte que

$$\int_{-1}^1 d\mu P_\ell^m(\mu) P_{\ell'}^m(\mu) = \frac{2}{(2\ell+1)} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell\ell'}. \quad (\text{F.2.14})$$

En résumé, pour  $0 \leq m \leq \ell$ ,

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\varphi}; \quad (\text{F.2.15})$$

$$Y_\ell^{-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m [Y_\ell^m(\theta, \varphi)]^*. \quad (\text{F.2.16})$$

Dans une réflexion d'espace,  $(\theta, \varphi) \rightarrow (\pi - \theta, \varphi + \pi)$ ,

$$Y_\ell^m(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\theta, \varphi). \quad (\text{F.2.17})$$

Les premières fonctions de Laplace sont données par

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad (\text{F.2.18})$$

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, \quad Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\varphi} \quad (\text{F.2.19})$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1), \quad Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{i\varphi}, \quad Y_2^2 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{2i\varphi}. \quad (\text{F.2.20})$$

Pour  $m = 0$ ,

$$Y_\ell^0 = \sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}} P_\ell(\cos\theta). \quad (\text{F.2.21})$$

### F.3 Résolution de l'équation de Laplace

En coordonnées sphériques, l'équation de Laplace s'écrit

$$\Delta\phi(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r}] - \frac{\vec{L}^2}{r^2} \phi = 0. \quad (\text{F.3.22})$$

On peut en rechercher la solution sous la forme

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} c_{\ell,m}(r) Y_\ell^m(\theta,\varphi) \quad (\text{F.3.23})$$

dont les coefficients doivent obéir les équations différentielles du second ordre

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 \frac{dc_{\ell,m}(r)}{dr}] = \ell(\ell+1) \frac{1}{r^2} c_{\ell,m}(r). \quad (\text{F.3.24})$$

Par les techniques devenues familières, on trouve, pour  $0 < r < \infty$ ,

$$c_{\ell,m}(r) = A_\ell^m r^\ell + B_\ell^m r^{-\ell-1} \quad (\text{F.3.25})$$

où  $A_\ell^m, B_\ell^m$  sont des constantes arbitraires; pour  $0 \leq r < \infty$ , tous les  $B_\ell^m = 0$  et pour  $0 < r \leq \infty$ , tous les  $A_\ell^m = 0$  pour  $\ell > 0$ . De sorte que, en tenant compte des restrictions ci-dessus imposées par les domaines, la solution générale de l'équation de Laplace peut s'écrire comme

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} [A_\ell^m r^\ell + B_\ell^m r^{-\ell-1}] Y_\ell^m(\theta,\varphi) \quad (\text{F.3.26})$$

Les constantes arbitraires peuvent être déterminées par la donnée de la solution ou de sa dérivée normale sur une surface fermée.

#### Exemple

La solution  $\phi$  qui s'annule à l'infini et qui prend sur la sphère de rayon  $a$  la valeur  $f(\theta,\varphi) = \sin\theta \sin\varphi$  est, pour  $0 \leq r \leq a$ ,

$$\phi = \frac{i}{2a} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} r [Y_1^1 + Y_1^{-1}] \quad (\text{F.3.27})$$

et pour  $a \leq r \leq \infty$ ,

$$\phi = \frac{ia^2}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{1}{r^2} [Y_1^1 + Y_1^{-1}]. \quad (\text{F.3.28})$$

## F.4 Théorème d'addition

Si

$$\cos\gamma = \vec{n} \cdot \vec{n}' = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi'), \quad (\text{F.4.29})$$

on a la formule d'addition suivante

$$\frac{(2\ell + 1)}{4\pi} P_\ell(\cos\gamma) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta, \varphi) Y_\ell^{*m}(\theta', \varphi'). \quad (\text{F.4.30})$$

Il vient donc, pour  $\frac{r'}{r} < 1$ ,

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}} \quad (\text{F.4.31})$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\gamma) \quad (\text{F.4.32})$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4\pi}{(2\ell + 1)} \frac{r'^\ell}{r^{\ell+1}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta, \varphi) Y_\ell^{*m}(\theta', \varphi'). \quad (\text{F.4.33})$$

Ceci donne, par exemple, pour  $r \gg r'$ , le développement multipolaire du potentiel sous la forme

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (\text{F.4.34})$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\vec{x}') \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4\pi}{(2\ell + 1)} \frac{r'^\ell}{r^{\ell+1}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta, \varphi) Y_\ell^{*m}(\theta', \varphi') \quad (\text{F.4.35})$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell + 1)r^{\ell+1}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta, \varphi) \int d^3x' \rho(\vec{x}') r'^\ell Y_\ell^{*m}(\theta', \varphi'). \quad (\text{F.4.36})$$

Remarquer que  $r'^\ell Y_\ell^{*m}(\theta', \varphi')$ , (non sommé sur  $\ell$ ), est un polynôme homogène de degré  $\ell$  en les variables  $x', y', z'$  ou en  $x'_+ = x' + iy', x'_- = x' - iy', z'$ .

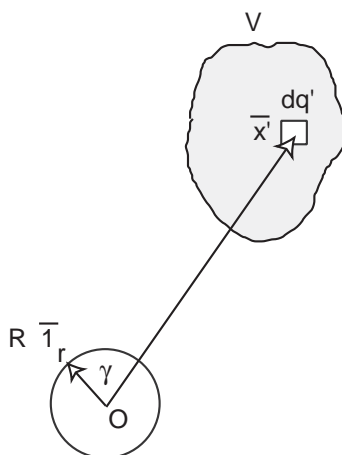
## Annexe G

# Problème d'équilibre

### G.1 Equilibre électrostatique

Soit  $\phi$  le potentiel électrostatique produit par la distribution  $\rho$  dans  $V$  borné de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $\bar{x}$  un point de la région extérieure à  $V$ , où  $\phi$  est solution de l'équation de Laplace

$$\Delta\phi(\bar{x}) = 0. \quad (\text{G.1.1})$$



**Théorème G.1.** *La valeur de  $\phi$  en  $\bar{x}$  est égale à la valeur moyenne de  $\phi$  sur la sphère de rayon  $R$  centrée en  $\bar{x}$  entièrement extérieure à  $V$ .*

Pour le démontrer, choisissons l'origine des coordonnées au point  $\bar{x}$ . Tout point de la sphère est alors repéré par  $R\bar{r}$ . Considérons d'abord en un point de la sphère

$R\bar{1}_r$  le potentiel dû à l'élément de charge  $dq'$  en  $\bar{x}'$ :

$$d\phi(R\bar{1}_r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'(\bar{x}')}{|R\bar{1}_r - \bar{x}'|} \quad (\text{G.1.2})$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'(\bar{x}')}{\sqrt{R^2 + r'^2 - 2Rr' \cos \gamma}} \quad (\text{G.1.3})$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'(\bar{x}')}{r' \sqrt{\frac{R^2}{r'^2} + 1 - 2\frac{R}{r'} \cos \gamma}} \quad (\text{G.1.4})$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq'(\bar{x}') \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{R^\ell}{r'^{\ell+1}} P_\ell(\cos \gamma) \quad (\text{G.1.5})$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq'(\bar{x}') \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{R^\ell}{r'^{\ell+1}} \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^{*m}(\theta, \varphi) Y_\ell^m(\theta', \varphi') \quad (\text{G.1.6})$$

La moyenne de ce potentiel sur la sphère de rayon  $R$  vaut

$$d\phi_{moy} = \frac{1}{4\pi R^2} \int dS d\phi(R\bar{1}_r) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\cos \theta \int_0^{2\pi} d\varphi d\phi(R\bar{1}_r) \quad (\text{G.1.7})$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq'(\bar{x}') \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{R^\ell}{r'^{\ell+1}} \frac{1}{2\ell+1} \delta_{\ell 0} \delta_{m 0} \quad (\text{G.1.8})$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq'(\bar{x}') \frac{1}{r'} \quad (\text{G.1.9})$$

Pour la calculer, on a utilisé l'orthogonalité des harmoniques sphériques et le fait que  $Y_0^0 = 1/\sqrt{4\pi}$ .

Cette moyenne coïncide avec la valeur du potentiel dû à  $dq'$  calculée au centre de la sphère. Pour le potentiel complet,

$$\phi(R\bar{1}_r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{dq'(\bar{x}')}{|R\bar{1}_r - \bar{x}'|} \quad (\text{G.1.10})$$

on a donc la même propriété, à savoir

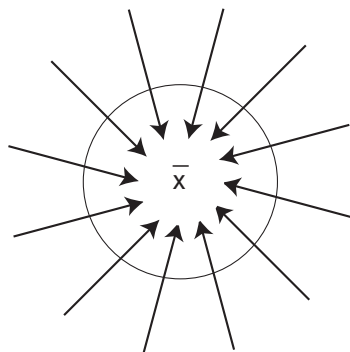
$$\phi_{moy} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\cos \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \phi(R\bar{1}_r) = \phi(\bar{0}). \quad (\text{G.1.11})$$

**Corollaire G.1.** *Il résulte de ce théorème que  $\phi$  solution de l'équation de Laplace ne peut pas avoir de minimum ou de maximum local, c'est-à-dire que les valeurs extrêmes de  $\phi$  se trouvent sur les bords.*

En effet, si  $\phi$  avait un maximum (resp. minimum) en  $\bar{x}$ , on pourrait trouver une sphère centrée sur  $\bar{x}$  en tout point de laquelle la valeur de  $\phi$  serait inférieure (resp. supérieure) à  $\phi(\bar{x})$ ; la moyenne de  $\phi$  sur cette sphère serait donc aussi inférieure (resp. supérieure) à  $\phi(\bar{x})$ , ce qui serait contraire au théorème précédent.

Il y a une manière plus intuitive d'arriver à ce résultat, basée cette fois, sur le théorème de Gauss.

Supposons que  $\phi$  a un minimum en  $\bar{x}$ , alors, partout au voisinage de ce point, la force appliquée à une charge test tend à ramener celle-ci vers  $\bar{x}$  et est donc dirigée vers  $\bar{x}$ . Le flux de cette force au travers de la surface d'une petite sphère centrée sur  $\bar{x}$  n'est donc pas nul or, par hypothèse, il n'y a pas de charge en  $\bar{x}$ .





## Annexe H

# Fonction de Green retardée

Les solutions élémentaires ou fonctions de Green de l'équation de d'Alembert sont solutions de l'équation

$$\square G(\bar{x}, t) = 4\pi \delta(t) \delta^3(\bar{x}) \quad (\text{H.0.1})$$

avec le d'Alembertien défini comme

$$\square = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta. \quad (\text{H.0.2})$$

On peut les obtenir aisément en posant

$$G(\bar{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{G}(\bar{x}, \omega) e^{-i\omega t} \quad (\text{H.0.3})$$

et en utilisant

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t}. \quad (\text{H.0.4})$$

L'équation (H.0.1) devient alors

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} + \Delta\right) \tilde{G}(\bar{x}, \omega) = -4\pi \delta^3(\bar{x}). \quad (\text{H.0.5})$$

Puisque la source est ponctuelle, on peut faire l'hypothèse que  $\tilde{G}$  est à symétrie sphérique, c'ad que

$$\tilde{G}(\bar{x}, \omega) = \tilde{G}(r, \omega) \quad \text{avec} \quad r = |\bar{x}|. \quad (\text{H.0.6})$$

En utilisant le laplacien en coordonnées sphériques, on met l'équation (H.0.6) sous la forme

$$\frac{\omega^2}{c^2} \tilde{G}(r, \omega) + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \tilde{G}(r, \omega)) = -4\pi \delta^3(\bar{x}). \quad (\text{H.0.7})$$

Puis, en posant

$$\tilde{G}(\bar{x}, \omega) = \frac{1}{r} F(r, \omega), \quad (\text{H.0.8})$$

on obtient successivement

$$\partial_r \tilde{G} = -\frac{1}{r^2} F + \frac{1}{r} \partial_r F \quad (\text{H.0.9})$$

$$r^2 \partial_r \tilde{G} = -F + r \partial_r F \quad (\text{H.0.10})$$

$$\partial_r (r^2 \partial_r \tilde{G}) = -\partial_r F + \partial_r F + r \partial_r^2 F = r \partial_r^2 F \quad (\text{H.0.11})$$

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \tilde{G}) = \frac{1}{r} \partial_r^2 F. \quad (\text{H.0.12})$$

L'équation (H.0.7) est ainsi devenue

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\omega^2}{c^2} + \partial_r^2 \right] F(r, \omega) = -4\pi \delta^3(\bar{x}). \quad (\text{H.0.13})$$

En dehors de l'origine, c'ad, pour  $r \neq 0$  ou  $\bar{x} \neq 0$ , cette équation est du type oscillateur harmonique dont la solution générale peut s'écrire comme la superposition linéaire des deux solutions particulières

$$F^\pm(r, \omega) = e^{\pm ikr} \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (\text{H.0.14})$$

Ces dernières fournissent

$$G^\pm(r, t) = \frac{1}{r} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{\pm i\frac{\omega}{c}r} e^{-i\omega t} = \frac{1}{r} \delta(t \mp \frac{r}{c}). \quad (\text{H.0.15})$$

On vérifie aisément que les  $G^\pm$  sont bien solutions de (H.0.1) grâce à

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta^3(\bar{x}). \quad (\text{H.0.16})$$

$G^+ = G_R$  est la fonction de Green retardée de l'équation de d'Alembert;  $G^- = G_A$  est la fonction de Green avancée.

Pour une source ponctuelle en  $\bar{x}'$  au temps  $t'$ , l'équation (H.0.1) devient

$$\square G(\bar{x}, t; \bar{x}', t') = 4\pi \delta(t - t') \delta^3(\bar{x} - \bar{x}') \quad (\text{H.0.17})$$

et les fonctions de Green retardée et avancée s'écrivent

$$G^\pm(|\bar{x} - \bar{x}'|, t - t') = \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \delta(t - t' \mp \frac{|\bar{x} - \bar{x}'|}{c}). \quad (\text{H.0.18})$$

# Annexe I

## Conditions aux limites

### I.1 Rappels

L'analyse des équations de Maxwell à la surface limite entre deux milieux nous a fourni les informations générales suivantes sur le comportement des champs au passage de la surface:

i) la continuité des composantes tangentielles de  $\bar{E}$

$$\bar{n} \times (\bar{E}_{(1)} - \bar{E}_{(2)}) = 0. \quad (\text{I.1.1})$$

ii) la discontinuité de la composante normale du déplacement électrique, s'il y a sur la surface limite une distribution superficielle de charge  $\Sigma$

$$\bar{n} \cdot (\bar{D}_{(1)} - \bar{D}_{(2)}) = \Sigma. \quad (\text{I.1.2})$$

iii) la continuité de la composante normale de l'induction  $\bar{B}$

$$\bar{n} \cdot (\bar{B}_{(1)} - \bar{B}_{(2)}) = 0. \quad (\text{I.1.3})$$

iv) la discontinuité des composantes tangentielles du champ  $\bar{H}$ , s'il y a sur la surface limite une distribution superficielle de courant  $\bar{k}$

$$\bar{n} \times (\bar{H}_{(1)} - \bar{H}_{(2)}) = \bar{k}. \quad (\text{I.1.4})$$

Par ailleurs, l'équation de continuité

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{j} = -\partial_t \rho, \quad (\text{I.1.5})$$

intégrée sur le volume d'une boîte à pilules fournit

$$\bar{n} \cdot (\bar{j}_{(1)} - \bar{j}_{(2)}) = -\partial_t \Sigma. \quad (\text{I.1.6})$$

### I.2 Champs monochromatiques en $e^{-i\omega t}$

Dans ce cas,  $\Sigma$  doit aussi dépendre du temps par  $e^{-i\omega t}$ ; l'équation (I.1.6) devient alors

$$\bar{n} \cdot (\bar{j}_{(1)} - \bar{j}_{(2)}) = i\omega \Sigma. \quad (\text{I.2.7})$$

En injectant dans les équations (I.1.2) et (I.2.7) les relations constitutives des milieux

$$\bar{D}_{(1)} = \epsilon_1 \bar{E}_{(1)} \quad \text{et} \quad \bar{j}_{(1)} = \sigma_1 \bar{E}_{(1)} \quad (\text{I.2.8})$$

$$\bar{D}_{(2)} = \epsilon_2 \bar{E}_{(2)} \quad \text{et} \quad \bar{j}_{(2)} = \sigma_2 \bar{E}_{(2)}, \quad (\text{I.2.9})$$

(où  $\sigma_i$  désigne la conductivité du milieu  $i$ ) celles-ci deviennent

$$\epsilon_1 E_{(1)n} - \epsilon_2 E_{(2)n} = \Sigma \quad (\text{I.2.10})$$

$$\sigma_1 E_{(1)n} - \sigma_2 E_{(2)n} = i\omega \Sigma. \quad (\text{I.2.11})$$

### I.3 Cas particuliers

i) si  $\Sigma = 0$ , alors (I.2.10) et (I.2.11) imposent

$$\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} = \frac{\epsilon_2}{\sigma_2}. \quad (\text{I.3.12})$$

Ceci peut être réalisé si on choisit les bons matériaux mais aussi lorsque

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0 \quad \text{ou} \quad \infty. \quad (\text{I.3.13})$$

Le cas où les deux conductivités sont infinies n'a pas grand intérêt; le cas où les deux conductivités s'annulent est approximativement réalisé à la limite entre deux bons diélectriques.

ii) si  $\Sigma \neq 0$ , ce qui est plus courant, on peut l'éliminer des équations (I.2.10) et (I.2.11) et utiliser la condition limite

$$\left(\epsilon_1 - \frac{\sigma_1}{i\omega}\right) E_{(1)n} - \left(\epsilon_2 - \frac{\sigma_2}{i\omega}\right) E_{(2)n} = 0. \quad (\text{I.3.14})$$

iii) Si le milieu 2 est un conducteur parfait, c'est-à-dire, où  $\sigma_2 = \infty$ . Dans ce cas, pour satisfaire les équations (I.2.10) et (I.2.11), il faut

$$E_{(2)n} = 0 \quad \text{et} \quad E_{(1)n} = \frac{\Sigma}{\epsilon_1}. \quad (\text{I.3.15})$$

Revenons à l'équation (I.1.4). La densité surfacique de courant est nulle sauf si la conductivité est infinie; donc, si la conductivité est finie, (I.1.4) se réduit à

$$\bar{n} \times (\bar{H}_{(1)} - \bar{H}_{(2)}) = 0. \quad (\text{I.3.16})$$

Si le milieu 2 est un conducteur parfait,  $\sigma_2 = \infty$ , alors, comme on l'a déjà montré  $E_{(2)n} = 0$ . On peut dire plus, puisque, dans le milieu 2, on a encore l'équation d'Ampère-Maxwell

$$\bar{\nabla} \times \bar{H}_{(2)} = \bar{j}_{(2)} + \partial_t \bar{D}_{(2)}. \quad (\text{I.3.17})$$

Avec les équations constitutives du milieu 2 et la dépendance en le temps de  $\bar{E}_{(2)}$  de la forme  $e^{-i\omega t}$ , il vient

$$\bar{\nabla} \times \bar{H}_{(2)} = \sigma_2 \bar{E}_{(2)} - i\omega \epsilon_2 \bar{E}_{(2)} \quad (\text{I.3.18})$$

		Résumé		
$\sigma$	$E_t$	$D_n$	$H_t$	$B_n$
$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$	$E_{(1)t} = E_{(2)t}$	$D_{(1)n} = D_{(2)n}$	$H_{(1)t} = H_{(2)t}$	$B_{(1)n} = B_{(2)n}$
$\sigma_2 = \infty$	$E_{(2)t} = 0$ $E_{(2)n} = 0$	$D_{(2)n} = 0$ $D_{(1)n} = \Sigma$	$H_{(2)t} = 0$ $\bar{n} \times \bar{H}_{(1)} = \bar{k}$	$B_{(2)n} = 0$ $B_{(1)n} = 0$
$\sigma_1, \sigma_2 \neq \infty$	$E_{(1)t} = E_{(2)t}$	$(\epsilon_1 - \frac{\sigma_1}{i\omega})E_{(1)n} =$ $(\epsilon_2 - \frac{\sigma_2}{i\omega})E_{(2)n}$	$H_{(1)t} = H_{(2)t}$	$B_{(1)n} = B_{(2)n}$

ou encore

$$\bar{E}_{(2)} = \frac{1}{\sigma_2 - i\omega \epsilon_2} \bar{\nabla} \times \bar{H}_{(2)}. \quad (\text{I.3.19})$$

Sous l'hypothèse raisonnable que le champ  $\bar{H}_2$  est borné et dérivable, on tire de la dernière égalité, avec  $\sigma_2 = \infty$ , que toutes les composantes de  $\bar{E}_{(2)}$  sont nulles.

Par ailleurs, les mêmes hypothèses que celles faites ci-dessus appliquées à l'équation de Faraday dans le milieu 2

$$\bar{\nabla} \times \bar{E}_{(2)} = -\partial_t \bar{B}_{(2)} = i\omega \bar{B}_{(2)}, \quad (\text{I.3.20})$$

et la relation constitutive

$$\bar{B}_{(2)} = \mu_2 \bar{H}_{(2)}, \quad (\text{I.3.21})$$

fournissent

$$\bar{H}_{(2)} = \frac{1}{i\omega \mu_2} \bar{\nabla} \times \bar{E}_{(2)} \quad (\text{I.3.22})$$

d'où

$$\bar{H}_{(2)} = 0. \quad (\text{I.3.23})$$

Si  $\bar{H}_{(2)} = 0$ , alors, à l'interface entre le milieu 1 et le milieu 2 de conductivité infinie, il faut

$$\bar{n} \times \bar{H}_{(1)} = \bar{k}. \quad (\text{I.3.24})$$

## Annexe J

# Définition alternative des transformations de Lorentz

Produit scalaire minkowskien dans  $\mathbb{R}^n$ :

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = v^\mu w^\mu \bar{e}_\mu \cdot \bar{e}_\nu = v^\mu w^\nu \eta_{\mu\nu}. \quad (\text{J.0.1})$$

$$\eta_{\mu\nu} = \bar{e}_\mu \cdot \bar{e}_\nu = \text{diag}(1, -1, -1, \dots, -1). \quad (\text{J.0.2})$$

**Définition J.1.** Une transformation de Lorentz est une application

$$\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : \bar{v} \mapsto \ell(\bar{v}) \quad (\text{J.0.3})$$

telle que

$$\ell(\bar{v}) \cdot \ell(\bar{w}) = \bar{v} \cdot \bar{w} \quad \forall \bar{v}, \bar{w}. \quad (\text{J.0.4})$$

**Théorème J.1.** Soit  $\ell$  une transformation de Lorentz et  $\{\bar{e}_\mu\}$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ , alors les vecteurs  $\{\ell(\bar{e}_\mu) = \bar{\ell}_\mu\}$  forment une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ .

Démonstration:

Il suffit de montrer que les vecteurs  $\{\bar{\ell}_\mu\}$  sont linéairement indépendants puisque, par définition

$$\bar{\ell}_\mu \cdot \bar{\ell}_\nu = \bar{e}_\mu \cdot \bar{e}_\nu = \eta_{\mu\nu}. \quad (\text{J.0.5})$$

Soit

$$c^\mu \bar{\ell}_\mu = 0. \quad (\text{J.0.6})$$

Alors, pour toute valeur de  $\nu$ ,

$$c^\mu \bar{\ell}_\mu \cdot \bar{\ell}_\nu = 0 = c^\mu \eta_{\mu\nu} = c_\nu \longrightarrow c^\nu = 0. \quad (\text{J.0.7})$$

**Théorème J.2.**  $\ell$  est une application linéaire.

Il faut montrer que,  $\forall \bar{v} = v^\mu \bar{e}_\mu$ , on a

$$\ell(\bar{v}) = v^\mu \bar{\ell}_\mu. \quad (\text{J.0.8})$$

Or, les  $\{\bar{\ell}_\mu\}$  forment une base; on peut donc décomposer  $\ell(\bar{v})$  sur cette base. Soit

$$\ell(\bar{v}) = V^\mu \bar{\ell}_\mu \quad (\text{J.0.9})$$

Alors

$$\bar{\ell}_\nu \cdot \ell(\bar{v}) = V^\mu \bar{\ell}_\nu \cdot \bar{\ell}_\mu = V_\nu \quad (\text{J.0.10})$$

$$= \bar{e}_\nu \cdot v = v_\nu. \quad (\text{J.0.11})$$

Donc aussi  $V^\mu = v^\mu$ .

La transformation de Lorentz se met donc sous la forme

$$\ell(\bar{e}_\mu) = \bar{\ell}_\mu = \bar{e}_\nu \Lambda^\nu_\mu \quad (\text{J.0.12})$$

où apparaît la matrice  $\Lambda$  de la transformation linéaire  $\ell$  qui définit le changement de base orthonormée.

# Bibliographie

- [1] John David Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd Edition, John Wiley (1998)
- [2] W.K.H.Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, 2d Edition, Addison-Wesley Publ.Cy.(1977)
- [3] David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3rd Edition, Prentice Hall (1999)
- [4] J.-Ph. Pérez, R. Carles, R. Fleckinger, *Electromagnétisme*, 3ème Edition, Masson, Paris (1997)
- [5] Laurent Schwartz, *Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques*, Hermann, Paris