Travail pour le cours *La structure de l'univers* PHYS-F-105

Cambier Amaury - 000461411 Gérard Pierre - 000459398

BA 3 Physique - Université libre de Bruxelles

12 décembre 2019

Série de questions pour les BA3 physique à rendre pour le mardi 17 décembre 2019

1 Exercice 1

1.1 Énoncé

La température typique des nuages HI est de 100 K. Quelle est la vitesse quadratique moyenne des atomes d'hydrogène ? Si leur densité est de $1\,\mathrm{cm}^{-3}$, quelle est la pression au sein du nuage ?

1.2 Résolution

Le gaz d'hydrogène atomique peut être interprète comme un gaz parfait. La distribution de *Maxwell-Boltzmann* peut donc s'appliquer.

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)$$

La vitesse quadratique moyenne se définissant comme $\bar{v} = \langle v^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$, on trouve la formule suivante :

$$\bar{v} = \left(\int_0^\infty f(v) v^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

Rappelons $k_b = 1{,}381 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$ et $m_H = 1{,}674 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

$\boxed{\text{Le résultat est alors } \bar{v} = 1{,}573 \times 10^{3}\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$

La densité donnée est de $1 \times 10^{6}\,\mathrm{m^{-3}}$. En fixant le volume à $V = 1\,\mathrm{L}$, on a $N = 1 \times 10^{6}$ particules. Utilisons la loi des gaz parfaits :

$$P = \frac{N k_b T}{V}$$

Rappelons $k_b = 1{,}381 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$, $T = 100\,\mathrm{K}$

$\boxed{\text{Le résultat est alors } P = 1{,}381 \times 10^{-15}\,\mathrm{Pa}}$

2 Exercice 2

2.1 Énoncé

Soit un vaisseau décollant de la Terre avec une accélération $+a$ maintenue pendant une durée $T/4$ (poussée des moteurs), il inverse la poussée (accélération $-a$) pendant une durée $T/2$ (entraînant le ralentissement du vaisseau puis un retour en arrière) avant de ré-inverser la poussée pendant $T/4$ (accélération $+a$) afin de se poser sur Terre avec une vitesse nulle. La durée T correspond à la durée du voyage mesurée sur Terre. Soit T' la durée du voyage pour l'astronaute. Quelle est la distance D parcourue (juste l'aller) si $a = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ et si pour l'astronaute le voyage aller-retour a duré $T' = 16$ ans ? Est-il envisageable (en termes de durée) pour l'astronaute d'atteindre (avec les mêmes conditions de vol) la galaxie d'Andromède (distance : 2×10^6 al) puis de revenir sur Terre ? Combien d'années se seront écoulées sur Terre à son éventuel retour ?

2.2 Résolution

Nous avons trouvé les formules suivantes [1][2] s'appliquant pour un cas de voyage ou le vaisseau, partant de $v_i = 0$ accélère de manière constante $a = +a$ jusqu'à un point D avant de décélérer également de manière constante $a = -a$ afin d'arriver à $v_f = 0$:

$$T = 2\sqrt{\frac{c^2}{a^2}\left(\left(\frac{aD}{2c^2}+1\right)^2 - 1\right)} \qquad\qquad t = \frac{2c}{a}\cosh^{-1}\left(\frac{aD}{2c^2}+1\right)$$

Avec :

- T le temps dans le référentiel au inertiel, ici la Terre
- t le temps propre dans le vaisseau
- a l'accélération propre du vaisseau
- c la vitesse de la lumière
- D la distance maximale parcourue

Dans notre cas, nous connaissons $t = \frac{1}{2}16\,\text{ans} = 2{,}23 \times 10^8\,\mathrm{s}$

$\boxed{\text{On trouve alors une distance de trajet aller } D = 5{,}4934 \times 10^{17}\,\mathrm{m} = 58{,}07\,\mathrm{al}}$

Admettons que l'astronaute veuille rejoindre *Andromède* à $D = 2 \times 10^6\,\mathrm{al} = 1{,}892 \times 10^{22}\,\mathrm{m}$ et en revenir. Il faut évidement multiplier le temps calculé par la formule en utilisant D par deux pour trouver le temps aller-retour

$\boxed{\text{La durée propre de son voyage aller-retour sera de } t = 1{,}779 \times 10^9\,\mathrm{s} = 56{,}41\,\text{ans}}$

Alors que la durée du trajet aller-retour dans le référentielle de la Terre sera beaucoup plus longue

$\boxed{\text{Le temps du trajet aller-retour dans le référentiel de la Terre est } T = 1{,}261 \times 10^{14}\,\mathrm{s} \approx 4 \times 10^6\,\text{ans}}$

3 Exercice 3

3.1 Énonce

A partir du théorème du viriel, déterminer la température interne moyenne du Soleil. Est-ce le bon ordre de grandeur ?

3.2 Résolution

Reprenons l'énonce du Théorème du viriel :

$$U + 2K = 0$$

L'énergie potentielle gravitationelle du soleil s'exprime comme :

$$U = -\frac{GM_\odot M_\odot}{R_\odot}$$

L'énergie cinétique quand à elle se calcule notamment grâce à la distribution de *Maxwell-Boltzmann* :

$$K = \frac{1}{2}M_\odot v^2 = \frac{1}{2}M_\odot \frac{3k_B T}{m_p}$$

On prend ici la masse du proton m_p, particule représentente principale de la masse du soleil.

$$\frac{GM_\odot^2}{R_\odot} = \frac{3M_\odot k_B T}{m_p}$$

Et finalement :

$$T = \frac{GM_\odot m_p}{3k_B R_\odot}$$

Rappelons $G = 6{,}674 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$, $M_\odot = 1{,}989 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$, $m_p = 1{,}672 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, $k_b = 1{,}381 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$, $R_\odot = 6{,}957 \times 10^{8}\,\mathrm{m}$

$\boxed{\text{Le résultat est alors } T = 7{,}705 \times 10^6\,\mathrm{K}}$

Selon *Wikipédia* [3] la température interne du soleil est d'environ $15{,}7 \times 10^6\,\mathrm{K}$. On remarque une erreur de facteur 2.

4 Exercice 4

4.1 Énonce

La constante solaire (quantité d'énergie solaire reçue au niveau de la Terre par unité de temps et par unité de surface) vaut $1{,}370 \times 10^3\,\mathrm{W\,m^{-2}}$ Quelle est la force répulsive ressentie par un grain noir (i.e. complètement absorbant) d'un diamètre de $1 \times 10^{-2}\,\mathrm{cm^{-2}}$ qui serait situé à une distance de 1 UA du Soleil ?

4.2 Résolution

4.2.1 Méthode 1

La constante solaire, ayant comme référence la distance Terre-Soleil, vaut $G_{SC} = 1370\,\mathrm{W\,m^{-2}}$. L'unité astronomique est définie par la distance Terre-Soleil. Une sphère de diamètre $d = 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{cm}$ à une distance de 1 UA expose la moitié de sa surface perpendiculaire à ce rayonnement. On parle donc de la surface d'une demi sphère *aplatie* en un disque de même rayon.

$$S_e = \pi R^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 7{,}8540 \times 10^{-9}\,\mathrm{m^2}$$

La puissance reçue subie par le grain noir complètement absorbant est alors $P_r = G_{SC} S_e$
La force répulsive est donc $F_r = P_r v^{-1}$ v étant la vitesse des photons du rayonnement, nous avons $v = c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

$$F_r = \frac{G_{SC} S_e}{c}$$

$\boxed{\text{Le résultat est alors } F_r = 3{,}5867 \times 10^{-14}\,\mathrm{N}}$

4.2.2 Méthode 2

Partons de l'équation suivante

$$E^2 = p^2c^2 + c^4m^2$$

Or nous savons que la masse des photons est nulle. Rappelons également les notations S_e pour la surface exposée aux rayonnements et G_{SC} pour la constante solaire.

$$P = \frac{E}{c}$$
$$dP = \frac{dE}{c}$$
$$dP = \frac{G_{SC}S_e dt}{c}$$
$$\frac{dP}{dt} = \frac{G_{SC}S_e}{c}$$

On retrouve donc bien la formule précédente

$$F_r = \frac{G_{SC}S_e}{c}$$

Références

[1] David Oesper *Space Travel Under Constant 1g Acceleration*
`https://www.skythisweek.info/constant1g.pdf`

[2] Tanmay Singal and Ashok K. Singal *Is interstellar travel to an exoplanet possible ?*
`https://arxiv.org/pdf/1308.4869.pdf`

[3] Wikipédia *Solar core*
`https://en.wikipedia.org/wiki/Solar_core`