Introduction à la mécanique quantique. PHYS-F203 (2018-2019).

SÉANCE 2 — QUELQUES OUTILS MATHÉMATIQUES

Université Libre de Bruxelles.

Conventions : les vecteurs sont considérés comme des colonnes, et les formes linéaires comme des lignes. Les composantes d'un vecteur (colonne) $\vec{v}$ seront désignées par v^i pour rappeler leur caractère contravariant, tandis que les composantes des formes linéaires sont désignées par ω_j pour rappeler leur caractère covariant. Les composantes d'une application linéaire $\mathcal{M}$ dans une base sont donnés par une matrice dont les entrées sont les nombres $M^i_{\ j}$, i représentant l'indice de ligne, et j l'indice de colonne. On sera amené à écrire l'équation $\vec{w} = A\vec{v}$ de la manière suivante $w^i = \sum_j A^i_{\ j} v^j$.

Exercice 1 *Structures propres.*
Soit une application linéaire $\mathcal{M} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice exprimée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

1. Caractérisez cette matrice, ainsi que son spectre. La matrice est-elle diagonalisable ?
2. Déterminez ses valeurs propres, ainsi que ses vecteurs propres.
3. Montrez que les vecteurs propres sont orthogonaux, et justifiez-le. Forment-ils une base de l'espace de départ $\mathbb{R}^3$?
4. Construisez et caractérisez la matrice U qui permet, par transformation de similitude, d'obtenir la forme de Jordan de M. Vérifiez vos réponses à la question 1.

Pour s'entraîner : analysez la structure propre des matrices suivantes.

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -i & i \\ -i & 0 & i \\ i & i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -6 & -4 \\ 5 & -11 & -6 \\ -6 & 9 & 4 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2

Soit $\mathcal{M}$ une transformation linéaire de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Définissons la matrice $M(a, b, \lambda)$, dépendant des deux naturels $a, b \in \{1, ..., n\}$ et du paramètre réel λ, et dont les composantes dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont

$$M(a, b, \lambda)^i_j = \delta^i_j + \lambda \delta^i_a \delta^b_j \tag{2}$$

où δ^i_j est le symbole de Kronecker, retournant 1 si $i = j$ et 0 sinon. Considérons une collection de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ notés $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^n$. On définit la matrice $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ comme la *concaténation* de ces n vecteurs, soit

$$V = \Big[\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\Big] = \begin{bmatrix} x^1_1 & x^1_2 & \rightarrow & x^1_n \\ x^2_1 & x^2_2 & \rightarrow & x^2_n \\ \downarrow & \downarrow & \searrow & \downarrow \\ x^n_1 & x^n_2 & \rightarrow & x^n_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

Montrez que le produit matriciel $V\, M(a, b, \lambda)$ redonne une matrice semblable à V, sauf pour la colonne b où le vecteur $\vec{x}_b$ est remplacé par la combinaison linéaire $\vec{x}_b + \lambda \vec{x}_a$.

Exercice 3 *Espace métrique de fonctions.*

Soit $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3([-1, 1])$, l'ensemble des polynômes de degré au plus 3 définis sur l'intervalle $[-1, 1]$ de la droite réelle.

1. Montrez qu'il s'agit d'un espace vectoriel de dimension 3 dont la base canonique est $\{1, x, x^2, x^3\}$.
2. Déterminez la matrice D de l'application linéaire $\mathcal{D} : \mathcal{V} \to \mathcal{V} : f(x) \mapsto f'(x)$ dans la base canonique.
3. Calculez la matrice T_a de l'opération de translation $\mathcal{T}_a : \mathcal{V} \to \mathcal{V} : f(x) \mapsto f(x + a)$, où $a \in \mathbb{R}$.
4. Montrez que $T_a = \exp(aD)$.
5. Si on définit un produit scalaire entre éléments de $\mathcal{V}$ par

$$(f|g)_L \equiv \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x\, f(x) g(x), \tag{4}$$

   déterminez une base orthonormée pour $\mathcal{V}$, notée $\{P_n(x)\}_{n=0}^3$. Vous obtenez ainsi les 4 premiers *polynômes de Legendre*. Vérifiez qu'ils sont vecteurs propres de la transformation linéaire

$$\mathcal{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{V} : f(x) \mapsto \mathcal{A}[P(x)] = \frac{d}{dx}\Big[(1 - x^2)\frac{df}{dx}\Big]. \tag{5}$$

   Commentaires ?

6. $\star$ Prolongeons les polynômes de $\mathcal{V}$ sur toute la droite réelle. Définissons un autre produit scalaire sur $\mathcal{V}$ comme

$$(f|g)_H \equiv \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \, \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \, f(x)g(x). \tag{6}$$

Déterminez une base orthogonale de polynômes moniques par rapport à celui-ci. Vous obtenez cette fois les 4 premiers *polynômes d'Hermite* $\{H_n(x)\}_{n=0}^{3}$. Prouvez la formule de récurrence $H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x)$, $\forall\, n \geq 1$, et utilisez-la pour démontrer que *tout polynôme d'Hermite $H_n(x)$ est un polynôme monique de degré n, de la même parité que n.*

Exercice 4 *Représentation intégrale de la distribution de Dirac.*

Soit une fonction arbitraire $f(x)$ infiniment différentiable et déclinant plus vite que n'importe quelle fonction polynômiale à l'infini. On appelle ce type d'objet une *fonction test.* On postule l'existence d'une quantité, la distribution de Dirac notée $\delta(x)$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \, \delta(x - x_0) \, f(x) = f(x_0). \tag{7}$$

1. Déterminez la parité de δ. Montrez que l'on peut identifier $\delta(ax)$ et $\delta(x)/|a|$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

2. Si $\{x_n\}_{n=1}^{N}$ sont les racines d'une fonction $g(x)$, montrez que

$$\delta[g(x)] = \sum_{n=1}^{N} \frac{\delta(x - x_n)}{|g'(x_n)|}$$

pour autant que $g'(x_n) \neq 0$, $\forall n$.

3. Dénotons par $\delta'(x)$ la dérivée de la distribution de Dirac, calculez $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \, \delta'(x - x_0) \, f(x)$.

4. Montrez que l'on peut identifier $x\delta'(x)$ et $-\delta(x)$.

5. Soit $H(x)$ la distribution "marche" de Heaviside. Montrer que l'on peut identifier $H'(x)$ et $\delta(x)$.

6. $\star$ Montrez que

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k \, e^{ik(x-x_0)}. \tag{8}$$

On dit que *la distribution de Dirac est la* transformée de Fourier *de la fonction constante.* *Indication.* Considérez la famille à un paramètre de fonctions

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k \, e^{ikx} e^{-\varepsilon^2 |k|^2/2},$$

et calculez la limite $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \, f(x)\phi_\varepsilon(x)$.

Vérifiez les résultats 1 à 5 à l'aide de la définition explicite (8).