Opérateurs Unitaires

$$U^{-1} = U^{\dagger} \quad : \quad UU^{\dagger} = U^{\dagger}U = \mathbb{I}$$

- $|\tilde{\psi}\rangle = U|\psi\rangle$ alors $\langle\tilde{\varphi}|\tilde{\psi}\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle \quad \forall\, |\psi\rangle, |\varphi\rangle$
  $|\tilde{\varphi}\rangle = U|\varphi\rangle$

$$\Updownarrow$$

U unitaire

~~[illegible]~~

- si $|i\rangle$ est une base orthonormée $\langle i'|i\rangle = \delta_{i'i}$
  et $|\tilde{i}\rangle = U|i\rangle$ est aussi une base orthonormée

$$\Updownarrow$$

U est unitaire

$\longrightarrow$ U est la matrice de changement de base

- si U et V unitaires, UV est unitaire

$\longrightarrow$ fct. d'opérateurs

- si $A = A^{\dagger}$ est hermitique
  alors $U = e^{-iA}$ est unitaire (car $U^{\dagger} = e^{iA^{\dagger}} = e^{iA}$ et donc $U^{\dagger}U = \mathbb{I}$)

- si U unitaire
  $U|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \Rightarrow |\lambda|^2 = 1 \qquad \lambda = e^{i\varphi}$

  on peut diagonaliser une matrice unitaire
  $$U = \sum_j e^{i\varphi_j} |j\rangle\langle j| \qquad \{|j\rangle\} = \text{base}$$

- éqn. de Schrödinger $i\partial_t|\psi\rangle = H(t)|\psi\rangle$
  $$\longrightarrow |\psi(t)\rangle = U(t,t')\,|\psi(t')\rangle$$

Représentation x et p

$|x_0\rangle$ = particule localisée en x $\equiv \delta(x-x_0) = \psi_{x_0}(x)$

$$\langle x_0'|x_0\rangle = \delta(x_0'-x_0) = \int dx\; \delta(x-x_0)\,\delta(x-x_0') = \delta(x_0'-x_0)$$

$|p_0\rangle$ = onde plane $\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ip_0x} = \psi_{p_0}(x)$

$$\langle p_0'|p_0\rangle = \int dx\; \frac{1}{2\pi} e^{-i(p_0'-p_0)x} = \delta(p_0'-p_0)$$

$$\langle x_0|p_0\rangle = \int dx\; \delta(x-x_0)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ip_0x} = \frac{e^{ip_0x_0}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\int dx_0\, |x_0\rangle\langle x_0| = \mathbb{I}$$

et $\int dp_0\, |p_0\rangle\langle p_0| = \mathbb{I}$

---

soit $|\psi\rangle$ un état quantique de fonction d'onde $\psi(x)$

$$\langle x_0|\psi\rangle = \psi(x_0)$$

$$\langle p_0|\psi\rangle = \int dx \langle p_0|x\rangle\langle x|\psi\rangle = \int dx\, \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\pi}}\,\psi(x)$$

Operator $\hat{X} = \int dx \; x \, |x\rangle\langle x|$

zi $\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$

$$\langle x| X |\psi\rangle = x\,\psi(x)$$

Operator $\hat{P} = \int dp \; p \; |p\rangle\langle p|$

$$\langle x|\hat{P}|\psi\rangle = \int dp \; \langle x||p\rangle \, p \, \langle p|\psi\rangle$$

$$= \int dp \; \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi}} \cdot p \cdot \tilde{\psi}(p)$$

$$= -i\partial_x \left(\int dp \; \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi}} \; \tilde{\psi}(p) \right)$$

$$= -i\partial_x \; \psi(x) = -i\partial_x \, \langle x|\psi\rangle$$

Commutator $[\hat{X}, \hat{P}]$

$$\langle x| [x, p] |\psi\rangle = x \; \langle x| p |\psi\rangle - \langle x| p \; x |\psi\rangle$$

$$= x \left(-i\partial_x \; \psi(x)\right) - \left(-i\partial_x \cdot (x\psi)\right)$$

$$= i\,\psi(x) = i\,\langle x|\psi\rangle$$

$$\boxed{[x, p] = i\hbar}$$

Relation d'incertitude de Heisenberg

Soit 2 observable A et B et un état $|\psi\rangle$

$$A' = A - \langle A \rangle$$
$$B' = B - \langle B \rangle$$

$$\Delta A = \sqrt{\langle A'^2 \rangle}$$
$$\Delta B = \sqrt{\langle B'^2 \rangle}$$

$$\Delta A . \Delta B \geqslant \frac{1}{2} |\langle [A,B] \rangle|$$

si $A = x$, $B = p$ $\boxed{\Delta x \, \Delta p \geqslant \frac{1}{2}\hbar}$

Preuve : $|\varphi\rangle = (A' + i\lambda B')|\psi\rangle$

$$0 \leqslant \langle \varphi|\varphi\rangle = \langle A'^2 \rangle + i\lambda \langle [A',B'] \rangle + \lambda^2 \langle B'^2 \rangle$$

note $([A',B'])^\dagger = -([A',B'])$

$\longrightarrow i[A',B']$ est hermitien.

$$\Delta = |\langle [A',B'] \rangle|^2 - 4 \langle A'^2 \rangle \langle B'^2 \rangle \leqslant 0$$

égalité $\Delta x \, \Delta p = \frac{1}{2}\hbar$.

$$\Longrightarrow \langle \varphi|\varphi\rangle = \langle x'^2 \rangle + \lambda \hbar + \lambda^2 \langle p'^2 \rangle$$

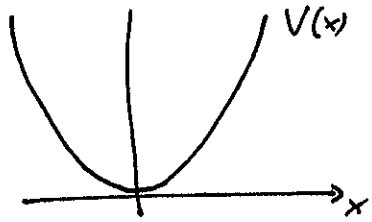
a une racine double λ_0.

$$\longrightarrow (x' + i\lambda_0 p')|\psi\rangle = 0$$

$$(x - \langle x \rangle + i\lambda_0(-i\partial_x - \langle p \rangle))\,\psi(x) = 0 \qquad (\lambda_0 \partial_x + x)\psi = 0$$

$$\boxed{\longrightarrow \psi(x) = e^{i\langle p \rangle x} \, e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{4\Delta x}}}$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} x^2$$



Solutions Classiques

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\omega = \frac{k}{m}$$

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

Quantiquement

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2m} \omega^2 x^2$$

– Opérateur Parité $\pi |x\rangle = -|x\rangle$

$$\pi \hat{X} \pi = -\hat{X}$$

$$\pi |p\rangle = |-p\rangle$$

$$\pi \hat{P} \pi = -\hat{P}$$

$$\pi H \pi = H \longrightarrow [H, \pi] = 0$$

$$[x, p] = i\hbar$$

$$x' = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x \qquad p' = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\, p \qquad [x', p'] = i$$

$$H = \hbar\omega \left(\frac{p'^2}{2} + \frac{x'^2}{2} \right)$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + ip') \\ a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - ip') \end{cases} \qquad x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger) \qquad p' = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^\dagger - a)$$

$$[a, a^\dagger] = 1$$

$$a^\dagger a = \frac{1}{2}(x'^2 + p'^2) - \frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

$[a,a^\dagger]=1$ $\qquad N=a^\dagger a.$ $\qquad$ spectre de $N=?$
vecteurs propres $\qquad$ 40

1°) $N\geq 0$ $\qquad N|\varphi\rangle=\nu|\varphi\rangle$

$$\nu=\langle\varphi|\nu|\varphi\rangle=\langle\varphi|N|\varphi\rangle=\|a|\varphi\rangle\|^2\geq 0$$

$[N,a]=-a$

2°) $[N,a^\dagger]=a^\dagger$

3°) si $N|\varphi\rangle=\nu|\varphi\rangle$

- $N(a|\varphi\rangle)=a(N-1)|\varphi\rangle=(\nu-1)(a|\varphi\rangle)$
- et $|a|\varphi\rangle|=0$ ssi $\nu=0$

4°) si $N|\varphi\rangle=\nu|\varphi\rangle$

- $N(a^\dagger|\varphi\rangle)=a^\dagger(N+1)|\varphi\rangle=(\nu+1)(a^\dagger|\varphi\rangle)$
- $|a^\dagger|\varphi\rangle|^2=\langle\varphi|a\,a^\dagger|\varphi\rangle=\langle\varphi|(N+1)|\varphi\rangle=(\nu+1)>0$ (car $\nu\geq 0$)

5°) spectre de $N\subset\mathbb{N}$

- contradiction : si $N|\varphi\rangle=\nu|\varphi\rangle$ et $n<\nu<n+1$
alors $a^n|\varphi\rangle$ est vecteur propre de N avec valeur propre $\nu-n<0$.

6°) si $\nu=n=$ valeur propre $\in\mathbb{N}$
$\longrightarrow$ alors spectre $=\mathbb{N}$ (par action de a et $a^\dagger$).

7°) état fondamental non dégénéré.

$$a|\varphi\rangle=0\longrightarrow\frac{1}{\sqrt2}(x'+ip')|\varphi\rangle=0$$

$$\frac{1}{\sqrt2}\left(x'\varphi(x')+\partial_{x'}\varphi(x')\right)=0$$

$$\longrightarrow\varphi(x')=C\,e^{-\frac{x'^2}{2}}\text{ est unique.}$$

8°) tous les niveaux sont non dégénérés.
si $N|\varphi\rangle=\nu|\varphi\rangle$ et $N|\varphi'\rangle=\nu|\varphi'\rangle$ et $\langle\varphi|\varphi'\rangle=0$
alors $a|\varphi\rangle$ et $a|\varphi'\rangle$ sont orthogonaux.

$$\langle\varphi'|a^\dagger a|\varphi\rangle=\nu\langle\varphi'|\varphi\rangle=0$$

$|0\rangle$ = état fondamental .

$a|0\rangle = 0$

$\frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle = |n\rangle$ car $\langle 0|a^n a^{+n}|0\rangle = n!\langle 0|0\rangle$

$$[A,BC] = [A,B]C + B[A,C]$$

$$[a,a^{+n}] = [a,a^{+n-1}]a^+ + a^{+n-1}[a,a^+]$$

$$= [a,a^{+n-1}]a^+ + a^{+n-1}$$

$$[a,a^{+n}] = n\,a^{+n-1}$$

les $|n\rangle$ = base de l'espace de Hilbert

$$\longrightarrow \sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{I}$$

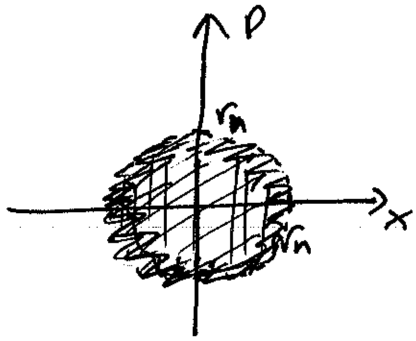
$$|n\rangle = \frac{a^{+n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle = \frac{(x-ip)^n}{\sqrt{2^n n!}}|0\rangle$$

$$\rightarrow \varphi_n(x) = \langle x|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}(x-\partial_x)^n\,\varphi_0(x) \qquad \varphi_0(x) = c\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$\langle n|x|n\rangle = 0$ $\qquad \langle n|p|n\rangle = 0$

$\Delta x^2 = \langle n|x^2|n\rangle = \left(n+\frac{1}{2}\right)$

$\Delta p^2 = \langle n|p^2|n\rangle = \left(n+\frac{1}{2}\right)$



~~**Variables canoniquement conjuguées (voire Cohen-Tannoudji Complément E II page 187)**~~

~~**C5.** Soit deux opérateurs X et P qui obéissent $[X,P] = i$. Nous allons déduire de la relation de commutation que $P = -id/dX$ et que $X = id/dP$.~~

~~Définissons $V(\alpha) = \exp[-i\alpha X]$ et $W(\beta) = \exp[-i\beta P]$ (voire exercice C1).~~

~~-V et W sont unitaires. Montrer que $V(\alpha)V(\alpha') = V(\alpha+\alpha')$ et idem pour W.~~

~~-Montrer à partir de la relation de commutation que $[X, W(\beta)] = \beta W(\beta)$. Trouver la relation similaire pour V et P.~~

~~-Supposons que X ait un vecteur propre de valeur propre x. Monter que $W(\beta)|x>$ est aussi un vecteur propre de X. En déduire que le spectre de X est continu, constitué de tous les réels.~~

~~-Supposons que les vecteurs propres de X ayant valeur propre x sont dégénérés (c'est à dire qu'il y a n vecteurs propres ayant la même valeur propre). Montrer que le degré de dégénérescence ne dépend pas de la valeur propre.~~

~~-Supposons que X est non dégénéré (à chaque valeur propre on ne peut associer qu'un vecteur propre).~~

~~-Calculer $< x|W(\beta)|\psi >$ en fonction de $< x|\psi >$. Prendre la limite $\beta \to 0$ et en déduire que $< x|P|\psi > = -id/dx < x|\psi >$.~~

~~-En déduire que $< x|p > = e^{ipx}/\sqrt{2\pi}$~~

Oscillateur Harmonique en représentation x : Polynômes d'Hermite

C6 Nous allons résoudre l'équation de Schrödinger pour un oscillateur harmonique en représentation x (voire Cohen-Tannoudji Complément C_V) :

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)\psi(x) = E\psi(x)$$

-Remarque préliminaire : si $\psi(x)$ est solution, alors $\psi(-x)$ est aussi solution. Donc $\psi(x) \pm \psi(-x)$ sont aussi solutions. Donc on peut chercher des solutions paires ou impaires.

-Analyser d'abord le comportement de la solution pour x grand. Montrer que le comportement asymptotique est $\psi(x) \simeq e^{\pm x^2/2}$.

-Poser $\psi(x) = h(x)e^{-x^2/2}$ et montrer que

$$\frac{d^2}{dx^2}h(x) - 2x\frac{d}{dx}h(x) + (2E-1)h(x) = 0 \qquad (1)$$

-On va chercher une solution de la forme

$$h(x) = x^p \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}x^{2m}$$

Montrer qu'en insérant cette forme pour $h(x)$ dans l'équation (1), on trouve la relation de récurrence :

$$(2m+p+2)(2m+p+1)a_{2m+2} = (4m+2p+1-2E)a_{2m} \qquad (2)$$

En mettant $2m+2=0$ et en imposant que $a_{-2}=0$ on trouve que $p(p-1)=0$. Le choix $p=0$ et $p=1$ correspondent aux solutions paires et impaires. Notons que le fait d'avoir $p \geq 0$ implique que la solution est régulière en $x = 0$ (pourquoi doit elle l'être ?)

Pour m grand, la relation de récurrence (2) se réduit à $a_{2m+2}/a_{2m} \simeq 1/m$. Montrer que ceci correspond au comportement asymptotique de la série de e^{x^2}. Donc la solution diverge pour $x \to \infty$.

Pour trouver des solutions qui décroissent à l'infini, la seule possibilité est que les a_m soient nuls pour $m \geq M$. Ceci implique (voire équation (2)) que $4M + 2p + 1 - 2E = 0$. En déduire la condition de quantification de l'énergie de l'oscillateur harmonique $E = n + 1/2$.

La valeur des coefficients a_0 ($p = 0$) ou a_1 ($p = 1$) n'est pas déterminée par l'équation 2. On peut les choisir pour que la solution soit normalisée.

Utiliser l'équation 2 pour donner les premières fonctions d'onde normalisées de l'oscillateur harmonique.

Produit tensoriel

$\mathcal{H}_1$ de dimension d_1

$\mathcal{H}_2$ de dimension d_2.

$\longrightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ de dimension $d_1 d_2$

- Définition: Application $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

$$|\varphi\rangle, |\psi\rangle \longrightarrow |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2.$$

bilinéaire $\left(a|\varphi_1\rangle + b|\varphi_2\rangle, |\psi\rangle\right) \longrightarrow a\left(|\varphi_1\rangle \otimes |\psi\rangle\right) + b\left(|\varphi_2\rangle \otimes |\psi\rangle\right)$

si $\{|u_i\rangle\}$ = base de $\mathcal{H}_1$, $\{|v_j\rangle\}$ = base de $\mathcal{H}_2$ $\longrightarrow \{|u_i\rangle \otimes |v_j\rangle\}$ = base de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

- si $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ $\quad |\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} \, |u_i\rangle \otimes |v_j\rangle$

- ⚠ la plupart des vecteurs dans $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ n'ont pas la forme $|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$

- produit scalaire.

$$\left(\langle\psi'| \otimes \langle\varphi'|\right)\left(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle\right) = \langle\psi'|\psi\rangle \langle\varphi'|\varphi\rangle$$

- produit tensoriel d'opérateurs

$A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$

$B : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$.

$A \otimes B : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 : (A \otimes B)\left(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle\right) = \left(A|\psi\rangle\right) \otimes \left(B|\varphi\rangle\right)$