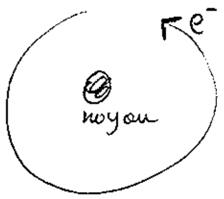
Expérience de Stern-Gerlach



moment angulaire $\vec{L} = m\,\vec{r}\times\vec{v}$

moment magnétique $\vec{m} = \underbrace{I}_{\text{courant}}\ \underbrace{\vec{S}}_{\text{surface}}$

tours par seconde $= \dfrac{v}{2\pi r}$

courant $I = e\dfrac{v}{2\pi r}$

$m = \dfrac{ev}{2\pi r}\cdot \pi r^2 = \dfrac{1}{2} e\, v r = \dfrac{1}{2}\dfrac{e}{m} L$

$\vec{m} = \dfrac{1}{2}\dfrac{e}{m}\vec{L}$ en pratique pour les atomes / particules élémentaires $\vec{m} = g\cdot\dfrac{1}{2}\dfrac{e}{m}\vec{L}$

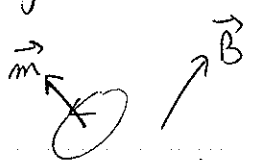
g = facteur de Landé

$g_e = -2{,}002$
$g_\mu = -2{,}002$
$g_n = -3{,}8$
$g_p = +5{,}6$
etc...

pour un mouvement purement orbital : $g = 1$ } + corrections...
pour un spin : $g = -2$ (équation de Dirac) }

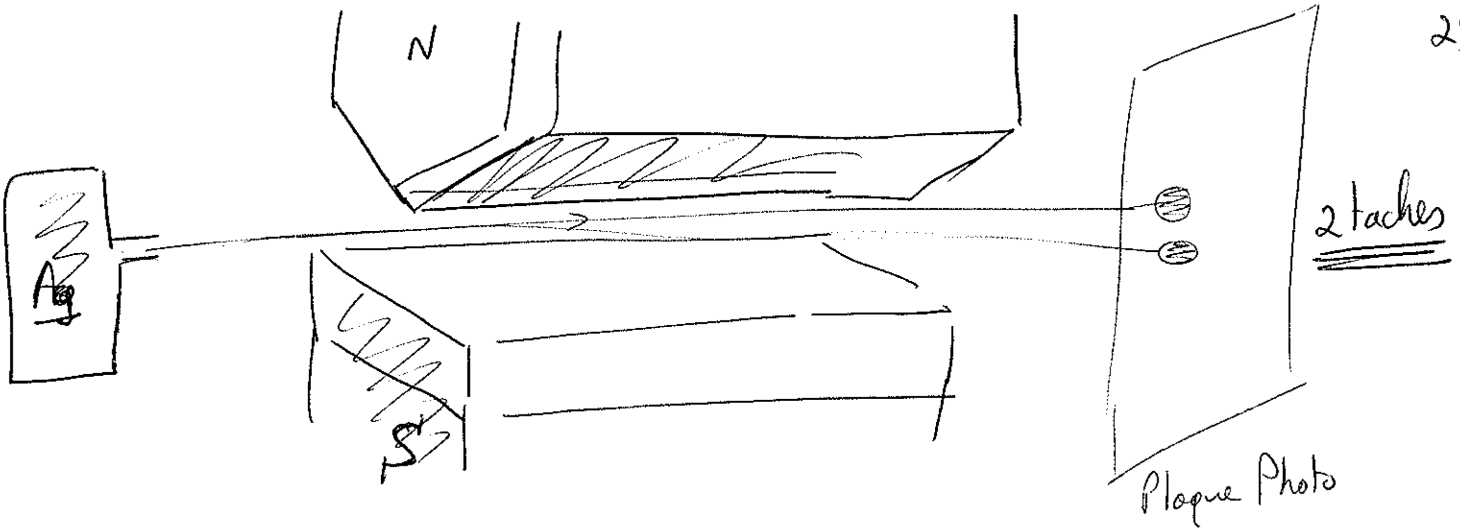
Comment mesurer la quantification du moment angulaire ?
⟶ mesurer le moment magnétique.

Energie d'un moment magnétique dans un champ magnétique



$E = \vec{m}\cdot\vec{B}$

si le champ $\vec{B}(\vec{x})$ n'est pas uniforme ⟶ force sur la particule
$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{B})$



$$\vec{B} \simeq B(z)\,\vec{1}_z$$

$$E = m_z\, B(z)$$

$$\vec{F} = m_z\, \partial_z B(z)\, \vec{1}_z$$

$\longrightarrow$ Spin $S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$

$\Longrightarrow$ état de spin dans la direction $+z$: $|\uparrow_z\rangle$

$-z$: $|\downarrow_z\rangle$

Opérateur linéaire

$$A : \mathcal{H} \to \mathcal{H} : |\psi\rangle \to A|\psi\rangle$$

$$A\left(a|\psi\rangle + b|\psi'\rangle\right) = a\left(A|\psi\rangle\right) + b\left(A|\psi'\rangle\right)$$

$$(AB)|\psi\rangle \equiv A(B|\psi\rangle)$$

Commutateur : $[A, B] = AB - BA$

Anti commutateur : $\{A, B\} = AB + BA$

Action de A sur le dual

$$A : \mathcal{H}^* \longrightarrow \mathcal{H}^* : \langle\varphi| \longrightarrow \langle\varphi|A$$

défini par $\langle\varphi|\left(A|\psi\rangle\right) = \left(\langle\varphi|A\right)|\psi\rangle = \langle\varphi|A|\psi\rangle$

Si $|u_i\rangle$ = base orthonormée

$$\langle u_i|\left(A|u_j\rangle\right) = \left(\langle u_i|A\right)|u_j\rangle = a_{ij}$$

$\longrightarrow$ représentation de A dans la base

$$\boxed{A = \sum_{i'j'} |u_{i'}\rangle\langle u_{j'}|\, a_{i'j'}}$$

$$\langle\varphi|A|\psi\rangle = \langle\varphi|\left(\sum_{i'j'} |u_{i'}\rangle\langle u_{j'}|\, a_{i'j'}\right)|\psi\rangle$$

$$= \sum_{i'j'} a_{i'j'}\, \langle\varphi|u_{i'}\rangle\langle u_{j'}|\psi\rangle$$

$\longrightarrow$ si $|\psi\rangle = |u_j\rangle$

$|\varphi\rangle = \langle u_i|$

$$= \sum_{i'j'} a_{i'j'}\, \delta_{ii'}\delta_{jj'} = a_{ij}$$

Hermitien conjugué)
Adjoint (d'un opérateur

si $|\psi'\rangle = A|\psi\rangle$

$$\downarrow$$

$$\langle\psi'| = \langle\psi|A^{\dagger}$$

$$\longrightarrow \overline{\langle\varphi|A^{\dagger}|\psi\rangle} = \langle\psi|A|\varphi\rangle$$

$$\langle u_i|A^{\dagger}|u_j\rangle = a^{\dagger}_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

$$A^{\dagger} = \overline{A^{T}} = \text{transposée conjuguée.}$$

Opérateur Hermitique / Hermitien : $A = A^{\dagger}$

$$a_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

Conjugaison complexe :
$\Longleftrightarrow$ renverser l'ordre du temps
$t \to -t$.

ket $\longleftrightarrow$ bra

constantes $\longleftrightarrow$ $\overline{\text{constantes}}$

$A \longleftrightarrow A^{\dagger}$

et inverser l'ordre des facteurs.

exemple $\lambda\,\langle u|AB|\psi\rangle\,|\alpha\rangle\langle\beta|$

$$\overline{\lambda}\,\langle\psi|B^{\dagger}A^{\dagger}|u\rangle\,|\beta\rangle\langle\alpha|$$

Représentation dans une base

Soit $|u_i\rangle$ = base orthonormée.

$$\mathbb{I} = \sum_i |u_i\rangle\langle u_i| = \text{identité}$$

$$\langle\psi|A|\varphi\rangle = \langle\psi|\mathbb{I}\,A\,\mathbb{I}|\varphi\rangle$$

$$= \langle\psi|\Big(\sum_i |u_i\rangle\langle u_i|\Big) A \Big(\sum_j |u_j\rangle\langle u_j|\Big)|\varphi\rangle$$

$$= \sum_{ij} \langle\psi|u_i\rangle \; \langle u_i|A|u_j\rangle \; \langle u_j|\varphi\rangle$$

Changement de base.

Soit $|v_j\rangle$ une autre base orthonormée.

$U_{ij} = \langle u_i|v_j\rangle$ = matrice de changement de base.

U est unitaire $U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{I}$

$$U = \sum_{ij} |u_i\rangle\langle v_j|\, U_{ij}$$

$$\delta_{i'i} = \langle u_{i'}|u_i\rangle = \langle u_{i'}|\sum_j |v_j\rangle\langle v_j||u_i\rangle$$

$$= \sum_j U_{i'j}\,\overline{U_{ij}} \longrightarrow UU^\dagger = \mathbb{I}$$

$$= \sum_i |u_i\rangle$$

$$\langle u_i|\psi\rangle = \langle u_i|\Big(\sum_i |v_j\rangle\langle v_j|\Big)|\psi\rangle = \sum_j \langle u_i|v_j\rangle\langle v_j|\psi\rangle = \sum_j U_{ij}\,\langle v_j|\psi\rangle$$

Diagonalisation d'un opérateur Hermitien

$A = A^\dagger$

valeurs propres : $A|\psi) = \lambda|\psi)$

1) $\lambda \in \mathbb{R}$.

preuve $\langle\psi|A|\psi) = \lambda\langle\psi|\psi)$

$$\overline{\langle\psi|A^\dagger|\psi)} = \overline{\langle\psi|A|\psi)} = \bar{\lambda}\,\overline{\langle\psi|\psi)} = \bar{\lambda}\,\langle\psi|\psi)$$

$\longrightarrow \lambda = \bar{\lambda}$

2) si $A|\psi) = \lambda|\psi)$ et $A|\psi') = \lambda'|\psi')$ et $\lambda \neq \lambda'$

alors $\langle\psi|\psi') = 0$

$A|\psi') = \lambda'|\psi') \Rightarrow \langle\psi'|A^\dagger = \langle\psi'|\overline{\lambda'} \Rightarrow \langle\psi'|A = \lambda'\langle\psi'|$

$\langle\psi'|A|\psi\rangle = \lambda\langle\psi'|\psi) \longrightarrow (\lambda-\lambda')\langle\psi'|\psi) = 0$

$= \lambda'\langle\psi'|\psi\rangle$

CQFD

$\Rightarrow$ si $A = A^\dagger$, il existe une base orthonormée $|\psi_n^i\rangle$ telle que

$A|\psi_n^i) = a_n|\psi_n^i)$ $\quad i = 1, \dots, g_n$ $\quad g_n$ = degré de dégénerescence de la valeur propre a_n.

$$\longrightarrow A = \sum_{n} a_n \left(\sum_i |\psi_n^i)\langle\psi_n^i|\right)$$

$$= \sum_n a_n P_n$$

$P_n = \sum_i |\psi_n^i)\langle\psi_n^i|$ = projecteur sur l'espace propre de valeur propre a_n.

~~A toute grandeur observable est associé un opé~~

À toute grandeur observable A est associé un opérateur hermitien $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$

$$\hat{A} = \sum_n a_n P_n .$$

La probabilité d'observer le résultat a_n ~~dans~~ dans l'état $|\psi\rangle$

$$P(a_n) = \langle\psi| P_n |\psi\rangle$$

__Note__ : 1) $\sum_n P(a_n) = 1$ car $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

2) si $|\psi\rangle \to e^{i\alpha}|\psi\rangle$ alors $P(a_n)$ ne change pas.

Après avoir obtenu le résultat a_n, l'état est

$$|\psi\rangle \xrightarrow{a_n} \frac{P_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_n|\psi\rangle}}$$

__réduction du paquet d'onde__

$H(t)$ est l'observable associée à l'énergie totale du système.

__Evolution Temporelle__

$$i\hbar\, \partial_t |\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$$

__sens mathématique :__
__écrire dans une base__

$$|\psi(t)\rangle = \sum_j c_j(t)\, |u_j\rangle$$

$$i\hbar\,\partial_t|\psi(t)\rangle = \sum_j i\hbar\, \dot{c}_j(t)\, |u_j\rangle$$

$$H(t) = \sum_{ij} h_{ij}(t)\, |u_i\rangle\langle u_j|$$

$$H(t)|\psi(t)\rangle = \sum_j h_{ij}(t)\, c_j(t)\, |u_i\rangle$$

$$\longrightarrow i\hbar\,\dot{c}_j = \sum_k h_{jk}(t)\, c_k$$

Cas d'un Hamiltonien indépendant du temps.

$$H|u_{in}\rangle = E_i |u_{in}\rangle$$

$$i\hbar\partial_t |\psi\rangle = H|\psi\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{in} e^{-i\frac{E_i t}{\hbar}} C_{in} |u_{in}\rangle \qquad C_{in} \text{ indépendant du temps}$$

---

insérer page 30

* Valeur moyenne d'une observable A

$$\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle = \sum_n a_n \langle\psi|P_n|\psi\rangle$$

$$= \sum_n a_n P(a_n) = \text{valeur moyenne des résultats.}$$

Ecart Quadratique Moyen

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2}$$

$$= \sqrt{\langle\psi|A^2|\psi\rangle - \langle\psi|A|\psi\rangle^2} = \text{écart quadratique moyen des résultats}$$

* On ne peut pas mesurer simultanément des observables qui ne commuttent pas.

On peut mesurer simultanément des observables qui commuttent car on peut les diagonaliser simultanément.

si $[A,B]=0$ et $A=A^+$, $B=B^+$, alors il existe une base qui diagonalise simultanément A et B.

1°) si $A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \Rightarrow A(B|\psi\rangle) = \lambda(B|\psi\rangle)$

2°) si $A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ et $A|\psi'\rangle = \lambda'|\psi'\rangle$ et $\lambda \neq \lambda'$ $\langle\psi'|B|\psi\rangle = 0$

exemple : spin 1/2

base $|\uparrow_z\rangle$, $|\downarrow_z\rangle$

spin polarisé dans la direction θ, φ $\quad |\uparrow_{\theta,\varphi}\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\,e^{i\varphi}\,|\downarrow\rangle$

autres bases : $\begin{cases} |\uparrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\uparrow_z\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\downarrow_z\rangle \\ |\downarrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\uparrow_z\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\downarrow_z\rangle \end{cases}$

$$\begin{cases} |\uparrow_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\uparrow_z\rangle + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,|\downarrow_z\rangle \\ |\downarrow_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\uparrow_z\rangle - i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,|\downarrow_z\rangle \end{cases}$$

Matrices de Pauli $\quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$[\sigma_x, \sigma_y] = i\,\sigma_z$ et permutations cycliques

$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathbb{I}$

$\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = n_x\,\sigma_x + n_y\,\sigma_y + n_z\,\sigma_z$.

opérateur spin dans direction z : $\begin{cases} S_z = \frac{\hbar}{2}\,\sigma_z . \\ \vec{n} : \quad S_{\vec{n}} = \frac{\hbar}{2}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{n} \end{cases}$

$\longrightarrow$ $|\uparrow_{\vec{n}}\rangle$, $|\uparrow_{-\vec{n}}\rangle$ = états propres de $S_{\vec{n}}$ de valeurs propres $\pm\frac{\hbar}{2}$.

Energie dans un champ magnétique $\vec{B}$

$$H = g\cdot\frac{1}{2}\frac{e}{m}\,\vec{B}\cdot\vec{S} = \hbar\omega_0\,\vec{n}\cdot\vec{S}$$

si $\vec{B} = B_0\,\vec{1}_z \qquad \omega_0 = \frac{1}{\hbar}\,g\cdot\frac{e}{2m}\,B_0$

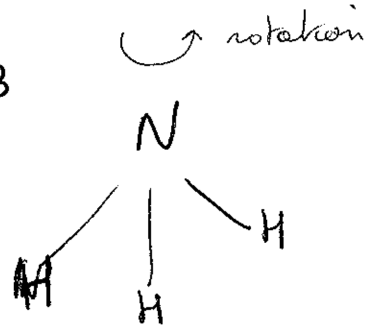
$$H\,|\uparrow_z\rangle = \frac{\hbar\omega_0}{2}\,|\uparrow_z\rangle$$

$$H\,|\downarrow_z\rangle = \frac{\hbar\omega_0}{2}\,|\downarrow_z\rangle$$

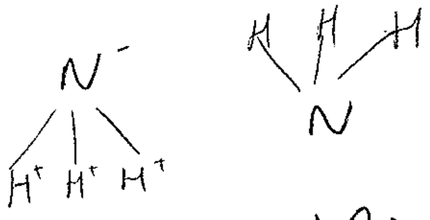
Précession de Larmor : $\quad |\psi(t)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,e^{-\frac{i\varphi}{2}}\,e^{-\frac{i\omega_0 t}{2}}\,|\uparrow_z\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\,e^{\frac{i\varphi}{2}}\,e^{\frac{i\omega_0 t}{2}}\,|\downarrow_z\rangle$

$\longrightarrow$ Horloges atomiques

Molécule d'Ammoniac NH_3



2 configurations :



$|\varphi_1\rangle$ $\quad$ $|\varphi_2\rangle$

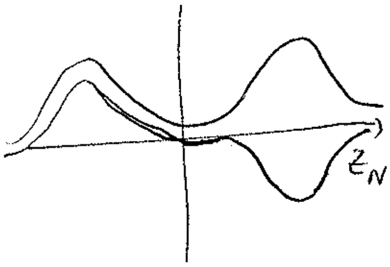
$$H_0 = E_0 \mathbb{I}$$

transition possible de $|\varphi_1\rangle$ à $|\varphi_2\rangle$ par effet tunnel.

$$W = -A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow H = E_0 \mathbb{I} + W$

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{pmatrix}$$



états propres $|\psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle\right)$

$$|\psi_a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\varphi_1\rangle - |\varphi_2\rangle\right)$$

d'énergie $E_0 - A$ et $E_0 + A$

que se passe-t-il si à l'instant $t=0$ on est dans l'état $|\varphi_1\rangle$

$$|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_s\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_a\rangle$$

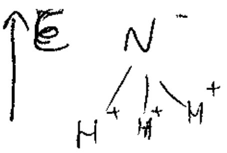
$$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(E_0-A)t}|\psi_s\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(E_0+A)t}|\psi_a\rangle$$

$$= |\varphi_1\rangle e^{-iE_0 t}\left(\frac{e^{iAt} + e^{-iAt}}{2}\right) + |\varphi_2\rangle e^{-iE_0 t}\left(\frac{e^{iAt} - e^{-iAt}}{2}\right)$$

$$= |\varphi_1\rangle e^{-iE_0 t}\cos At + |\varphi_2\rangle e^{-iE_0 t}\sin At.$$

$\longrightarrow$ oscillations.

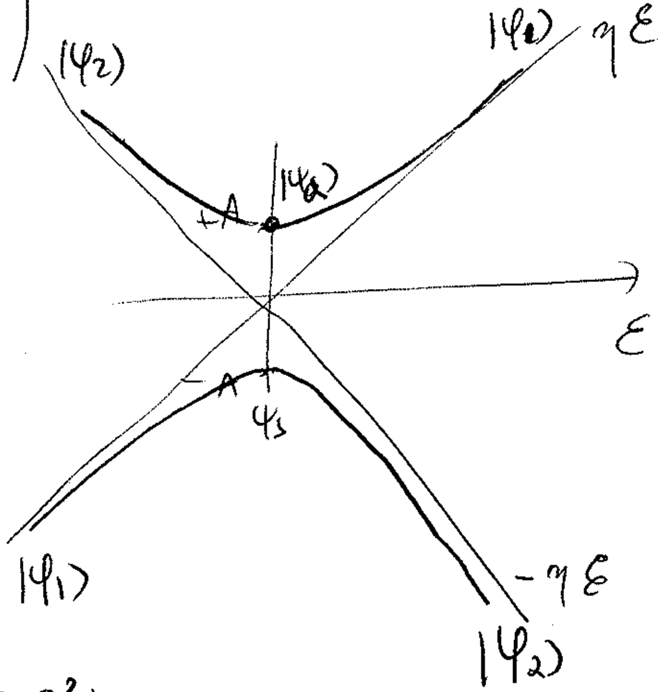
Champ électrique statique



$$H = E\,\mathbb{I} - A\,\sigma_x - \eta\,\mathcal{E}\,\sigma_z$$

$$= \begin{pmatrix} E - \eta\mathcal{E} & -A \\ -A & E + \eta\mathcal{E} \end{pmatrix}$$

$$E_\pm = E_0 \pm \sqrt{A^2 + \eta^2 \mathcal{E}^2}$$

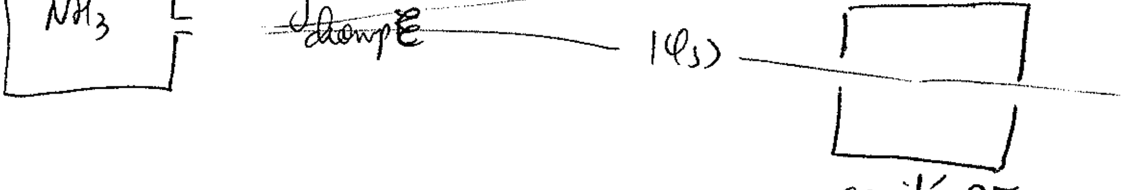


pour faible champ $\mathcal{E}$.

$$E_\pm = E_0 \pm \left(A + \frac{1}{2}\frac{\eta^2\mathcal{E}^2}{A}\right)$$

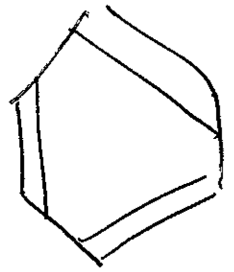
si $\mathcal{E} = \mathcal{E}' x$ dépend de x

$\longrightarrow$ force sur $|\varphi_a\rangle$ et $|\varphi_s\rangle$ $\longrightarrow$ permet de sélectionner les état $|\varphi_s\rangle$



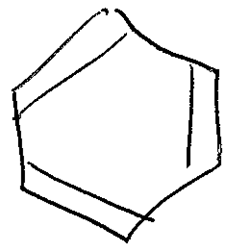
cavité RF resonante
à la fréquence ~~de~~ $\simeq 2A$.

Benzène.



$|\varphi_1\rangle$

et



$|\varphi_2\rangle$

$$H = E_0 \mathbb{I} - A\,\sigma_x$$

→ état fondamental $\dfrac{|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle}{\sqrt{2}}$ d'énergie $E_0 - A$

état excité $\dfrac{|\varphi_1\rangle - |\varphi_2\rangle}{\sqrt{2}}$ d'énergie $E_0 + A$