Rappel Math

Série de Fourier.

$$\begin{cases} C_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{+T/2} dx\, f(x)\, e^{-2\pi i\left(\frac{n}{T}\right)x} \\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, e^{2\pi i\left(\frac{n}{T}\right)x}. \end{cases}$$

Transformée de Fourier :

$$\begin{cases} \hat{f}(k) = F(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} \\ f(x) = F^{-1}(\hat{f}) = \displaystyle\int dk\, \hat{f}(k)\, \frac{e^{+ikx}}{\sqrt{2\pi}} \end{cases}$$

Remarque : si f à support borné et $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ contient le support

alors $C_n = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{T}\,\hat{f}\left(\dfrac{2\pi n}{T}\right)$

$$\longrightarrow f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{T}\,\hat{f}\left(\frac{2\pi n}{T}\right) e^{i\frac{2\pi n}{T}x}$$

$$k_n = \frac{2\pi n}{T} \qquad \Delta k = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k_n)\,\frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{2\pi}}\,\Delta k.$$

$$\simeq \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \hat{f}(k)\,\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$$

- si $h(x) = af(x) + bg(x) \Longrightarrow \hat{h}(k) = a\hat{f}(k) + b\hat{g}(k)$ Linéarité
- si $h(x) = f(x-x_0) \Longrightarrow \hat{h}(k) = e^{-ikx_0}\hat{f}(k)$ Translation
- si $h(x) = f(x)e^{ik_0x} \Longrightarrow \hat{h}(k) = \hat{f}(k-k_0)$ Modulation
- si $h(x) = f(ax) \Longrightarrow \hat{h}(k) = \dfrac{1}{a}\hat{f}\left(\dfrac{k}{a}\right)$ Changement d'échelle
- si $h(x) = \overline{f(x)} \Longrightarrow \hat{h}(k) = \overline{\hat{f}(-k)}$ Conjugaison
- si $f(x)$ réel $\Longrightarrow \hat{f}(-k) = \overline{\hat{f}(k)}$
- $\hat{f}(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)$

- $\widehat{f'}(k) = ik\hat{f}(k)$ dérivée.
- $\widehat{f^{(n)}}(k) = (ik)^n \hat{f}(k)$

si $f(x)\,x^n$ est ~~bo~~ intégrable $\Rightarrow$ $\hat{f}(k)$ est dérivable n fois

si $f(x)$ est ~~dér~~ dérivable n fois $\Rightarrow$ $\hat{f}(k)\,k^n$ est intégrable.

$\left\{ \begin{array}{l} S = \text{espace des fonctions } C^\infty \text{ à décroissance rapide } (x^n f \text{ est intégrable } \forall n). \\ F(S) = S \ : \ S \text{ invariant sous transformée de Fourier} \end{array} \right.$

Plancherel $\int dx\, f(x)\,\overline{g(x)} = \int dk\, \hat{f}(k)\,\overline{\hat{g}(k)}$

Parseval $\int dx\, |f(x)|^2 = \int dk\, |\hat{f}(k)|^2$

Convolution si $h(x) = (f * g)(x) = \int dy\, f(y)\, g(x-y)$

alors $\hat{h}(k) = \hat{f}(k)\cdot\hat{g}(k)$ $(\cdot\sqrt{2\pi})$

Distributions

Soit f une fonction. On ne s'intéresse pas à $f(x)$, mais à $\int dx\, f(x)\varphi(x)$ pour des fonctions test φ.

Espace de fonctions test :

- {fonctions C^∞ à support compact} = $\mathcal{D}$ $\longrightarrow$ $\mathcal{D}'$
- {fonctions C^∞ à décroissance rapide} = $\mathcal{S}$ $\longrightarrow$ distributions tempérées $= \mathcal{S}'$

continuité : $\varphi_k \to \varphi$ si $(\partial_x^\alpha \varphi_k) \xrightarrow[\text{uniformément}]{} (\partial_x^\alpha \varphi)$.

- T : forme linéaire continue sur l'espace des fonctions test.

$$T : \mathcal{D} \to \mathbb{R} : \varphi \to \langle T, \varphi \rangle$$

exemples : $\varphi \to \varphi(0)$: delta de Dirac

$$\varphi \to \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi^{(n)}(n)$$

$$\varphi \to \int dx\, f(x)\varphi(x) \quad \forall f \text{ intégrable}$$

- Dérivée d'une ~~fonction~~ distribution

$$\langle T', \varphi \rangle = \langle T, -\varphi' \rangle$$

$\hookrightarrow$ exemple : $\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$$\theta'(x) = \delta(x)$$

$\delta'(x)$: dérivée de Dirac.

- Multiplication d'une distribution par une fonction test

$$\langle \phi T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi\phi \rangle$$

⚠ on ne peut pas multiplier les distributions entre elles.

- Théorèmes de structure
  - localement une distribution est égale à la dérivée $\alpha^{\text{ème}}$ d'une fonction continue.
  - distribution tempérée = dérivée $\alpha^{\text{ème}}$ d'une fonction à croissance lente = fct. continue $*$ polynome.

Distributions tempérées.

$\mathcal{F}$ = transformée de Fourier.

$$\forall T \in S' : \quad \langle \mathcal{F} T, \phi \rangle = \langle T, \mathcal{F} \phi \rangle$$

$$\int dk \left(\int dx \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} f(x) \right) \phi(k) \qquad \int dx\, f(x) \left(\int dk \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} \phi(k) \right)$$

- toute distribution tempérée à une Transformée de Fourier qui est aussi une distribution tempérée.

Exemple $\quad \mathcal{F}\delta = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$$\mathcal{F}\delta' = \frac{ik}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\int dx\, e^{-ikx} = \delta(k)$$

δ de Dirac

$$\delta(x) \simeq \begin{cases} +\infty & \text{en } x=0 \\ 0 & x\neq 0 \end{cases} \qquad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x) = 1$$

$$\delta(x) = \lim_{\alpha\to 0} f_\alpha(x) \qquad \text{avec} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f_\alpha(x) = 1$$

$f_\alpha(x) > 0$

support $f_\alpha(x) \to \{0\}$

exemple : $f_\alpha(x) = \begin{cases} 1/\alpha & -\alpha/2 < x < \frac{\alpha}{2} \\ 0 & |x| > \frac{\alpha}{2} \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\,\delta(x) = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{x} dx'\, \delta(x') = \Theta(x) \qquad \int dx\, f(x)\,\delta(x-a) = f(a)$$

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x) \qquad \delta(g(x)) = \frac{1}{|g'(x_0)|}\delta(x-x_0)$$

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\; \delta(\xi - x)\,\delta(x-\eta) = \delta(\xi-\eta)$$

$\delta'(x)$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\; \delta'(x)\,f(x) = \Big[\delta(x) f(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x) f'(x)$$
$$= -f'(0)$$